Master 2 Agrégation, Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
UE5 - 8 - **Formule sommatoire de Poisson et échantillonnage de Shannon.**

Exercice 1 (Formule sommatoire de Poisson)

Enoncé du théorème : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ à décroissance rapide. Alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2\pi n)$ où $\hat{f}$ désigne la transformée de Fourier de f.

Remarques : Etre à décroissance rapide signifie que $x^n f^{(m)}(x) \underset{|x|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout $m, n \in \mathbb{N}$.

Référence : Gourdon ou Chambert-Loir (Attention formule fausse !).

Schéma de la preuve :

1) On pose $\varphi(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x + 2\pi n)$. Montrer que φ est C^∞ et 2π-périodique.

2) Calculer les coefficients de Fourier de φ. Remarquer en quoi cela réalise un lien entre les séries de Fourier et la transformée de Fourier.

3) Conclure à la formule sommatoire de Poisson.

4) Application : On va établir une équation fonctionnelle pour la fonction de Jacobi $\theta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2 x}$

On prend $f(x) = e^{-ax^2}$ avec $a > 0$.

a) On pose $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x+z)^2}\, dx$ pour $z \in \mathbb{C}$. Montrer que Φ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et que $\Phi'(z) = 0$. En déduire que $\Phi(z) = \sqrt{\pi/a}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

b) Calculer $\hat{f}(s)$ pour tout réel s.

c) En déduire que $\theta(\pi/x) = \sqrt{x}\theta(\pi x)$.

Exercice 2 (Echantillonnage de Shannon)

1) Soit f une fonction de classe C^∞ dont la Transformée de Fourier est de classe C^∞ et à support compact dans $[-\Omega, \Omega]$. Soit $0 < T < 1/(2\Omega)$. Montrer que

$$f(t) = 2T\Omega \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(2\pi nT) \frac{\sin((t - 2\pi nT)\Omega)}{(t - 2\pi nT)\Omega}$$

où la série converge uniformément.

(On commencera par poser $G(\xi) = \widehat{f}(\xi)$ pour $|\xi| \leq \Omega$, $G(\xi) = 0$ pour $\Omega < \xi < 1/(2T)$ que l'on étendra par $1/T$-péridicité et par montrer que G est de classe C^∞ et se développe en série de Fourier.)

2) Supposons maintenant que f et $\widehat{f}$ sont dans $L^1 \cap L^2$. Montrer que l'égalité du 1) reste encore vrai dans L^2.

Référence : Chambert-Loir (+ Willem)