Licence 3 de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,

Equations différentielles, Fiche 1

Type d'équation différentielle et Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire.

Exercice 1 (Type d'équation)

Dire si les équations différentielles suivantes sont linéaires ou non linéaires, avec condition initiale ou de bord

$$a)\ y'' + 4y' + 3y^2 = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 1,$$

$$b)\ y'' + 2yy' = 0, \quad y(0) = 1,\ y(1) = 0,$$

$$c)\ y'' - y' + \cos(y) = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(1) = 2,$$

$$d)\ y'' + ty' + y = te^t, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$$

Exercice 2 (Mise sous la forme $Y' = f(t, Y)$)

Mettre les équations différentielles suivantes sous la forme d'une équation différentielle $Y' = f(t, Y)$

$$a)\ y'' + (y')^2 = \cos t, \qquad b)\ y'' + 4ty' + 2y = 0,$$

$$c)\ y^{(3)} - y' + 2y'y^2 = 0, \qquad d)\ t^2y' - y\cos t + y'' = 1,$$

$$e)\ \left\{ \begin{array}{lll} y_1' & = & 2y_1 + ty_2, \\ y_2' & = & y_1 - y_2, \end{array} \right. \qquad f)\ \left\{ \begin{array}{lll} y_1'' & = & y_1 + ty_2', \\ y_2'' & = & y_1y_2 - y_1'y_2'. \end{array} \right.$$

Exercice 3 (Théorème de point fixe contractant dans un espace complet)

Dans cet exercice, nous allons montrer les deux résultats suivants.

Théorème du point fixe contractant dans un complet *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé complet. Soit $\Phi : E \longrightarrow E$ telle que $\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq k\|x - y\| \quad \forall x, y \in E$, où $k \in [0, 1[$ (Φ est contractante). Alors il existe un unique point fixe pour Φ, c'est-à-dire qu'il existe un et un seul $x \in E$ tel que $\Phi(x) = x$. De plus la suite d'itérés $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in E$ et $x_{n+1} = \Phi(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ converge dans E vers le point fixe x.*

Corollaire, Point fixe itérée contractante dans un complet *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé complet. Soit $\Phi : E \longrightarrow E$ telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ telle que l'itérée Φ^p soit contractante : $\|\Phi^p(x) - \Phi^p(y)\| \leq k\|x - y\| \quad \forall x, y \in E$, où $k \in [0, 1[$. Alors il existe un unique point fixe pour Φ, c'est-à-dire qu'il existe un et un seul $x \in E$ tel que $\Phi(x) = x$.*

1) Rappeler ce qu'est un espace normé complet.

2) Montrer l'unicité du point fixe pour le théorème.

3) Soit $x_0 \in E$ quelconque et soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_{n+1} = \Phi(x_n)$,$\forall n \in \mathbb{N}$
a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n\|x_1 - x_0\|.$$

b) En déduire que pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ avec $p > q$,

$$\|x_p - x_q\| \leq k^q \frac{1}{1-k}\|x_1 - x_0\|.$$

c) En déduire que $(x_p)_p$ converge dans $(E, \|\cdot\|)$ et que la limite est un point fixe pour Φ.

4) Montrer le corollaire.

Exercice 4 (Cauchy-Lipschitz linéaire par un point fixe)

Nous allons donner une preuve différente de celle vue en cours du Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire en utilisant les résultats de l'exercice précédent.

Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $A \in C(I, M_N(\mathbb{K}))$, $B \in C(I, \mathbb{K}^N)$. Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}^N$. Alors il existe une solution et une seule $y : I \to \mathbb{K}^N$ de $y'(t) = A(t)y(t) + B(t)$ telle que $y(t_0) = y_0$.*

Nous ne montrerons que l'existence sur un intervalle I compact. Le reste de la preuve étant inchangé.

Notons $\| \cdot \|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{K}^N$ et $\|\!| \cdot |\!\|$ la norme subordonnée à la norme euclidienne $\| \cdot \|$.

1) Rappeler la définition de la norme subordonnée.

Notons $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \beta]$ avec $\alpha, \beta \geq 0$ et E l'espace $C(I, \mathbb{K}^N)$. On le munit de la norme $\|y\|_E = \sup\limits_{t \in I} \|y(t)\|$.

2) Montrer que $(E, \| \cdot \|_E)$ est complet.

Soit l'application Φ qui à une fonction y associe la fonction $\Phi(y)$ définie par

$$\Phi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} (A(s)y(s) + B(s)) \, ds.$$

3) Montrer que Φ est une application de E dans E.

4) Soit $y, \tilde{y} \in E$. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\|\Phi^p(y)(t) - \Phi^p(\tilde{y})(t)\| \leq k^p \frac{|t - t_0|^p}{p!} \|y - \tilde{y}\|_E, \; \forall t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \beta],$$

où $k = \sup\limits_{t \in I} \|\!| A(t) |\!\| < +\infty$.

5) En déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\|\Phi^p(y) - \Phi^p(\tilde{y})\|_E \leq k^p \frac{\max(\alpha, \beta)^p}{p!} \|y - \tilde{y}\|_E.$$

6) Montrer qu'il existe p_0 pour lequel Φ^{p_0} est une contraction sur E muni de $\| \cdot \|_E$.

7) Conclure à l'existence d'une solution de $y'(t) = A(t)y(t) + B(t)$ telle que $y(t_0) = y_0$ sur $[t_0 - \alpha, t_0 + \beta]$.

Exercice 5 (Résolution par approximation)

La démonstration du cours du Théorème de Cauchy-Lipschitz permet de dire que la suite de fonctions définies par $y_0(t) = 2$ et pour $p \geq 1$, $y_{p+1}(t) = 2 + \int_0^t (y_p(s) + 1) \, ds$ converge uniformément sur tous les intervalles fermés bornés (compacts) de $\mathbb{R}$ vers la solution de $y' = y + 1$ avec $y(0) = 2$.

1) Montrer par récurrence sur p que $y_p(t) = 2 + 3t + \frac{3}{2!}t^2 + \frac{3}{3!}t^3 + \cdots + \frac{3}{p!}t^p$.

2) Rappeler le développement en série entière de e^t et son rayon de convergence.

3) En déduire la résolution de $y' = y + 1$ avec $y(0) = 2$.