

# THEORIE DU TRANSPORT OPTIMAL

*Yann Brenier\**

## **Une notion de géodésique pour un nuage de points?**

Le concept géométrique de géodésique est bien adapté à la description d'un "point mobile", ou, pour prendre une image plus physique, d'une "particule ponctuelle", astreinte à se déplacer au moindre coût d'un point à un autre sur une surface donnée. (Pensons à la trajectoire d'un vol transatlantique, modélisé par le mouvement d'un point à la surface du globe terrestre.) On peut se poser la question d'étendre cette notion au cas d'un "nuage de points" et de chercher à définir la trajectoire optimale d'un tel nuage entre deux configurations données. Cette question a été étudiée dès le XVIII<sup>ème</sup> siècle par Gaspard Monge dans son mémoire sur la "théorie des déblais et des remblais" et réexaminée dans les années 1940 par Leonid Kantorovich (un des quelques mathématiciens lauréats du prix Nobel d'économie).

{insertion d'une figure comparant le transport d'un point et celui d'un nuage de point.}

## **Transport d'un nuage constitué d'un nombre fini de points**

Pour une vision concrète du problème, il est bon de considérer le cas d'un nuage "fini" constitué de  $N$  points, par exemple  $N = 4$  pour fixer les idées. Pour simplifier on se place dans le plan (où les géodésiques sont les droites). On se donne la configuration du nuage à deux instants donnés et on cherche comment le transporter de façon optimale entre les deux configurations. A l'instant de départ le nuage est défini par une liste de 4 points dans le plan  $A_1, A_2, A_3, A_4$  et à l'instant final par quatre autres points  $B_1, B_2, B_3, B_4$ . Un point clé à comprendre est qu'on ne se soucie aucunement de l'individualité des "particules" et que leur numérotation est arbitraire. Ainsi, il est parfaitement possible de transporter, par exemple,  $A_1$  vers  $B_3$ ,  $A_2$  vers  $B_1$ ,  $A_3$

---

\*CNRS FR 2800, Université de Nice Sophia-Antipolis, [brenier@math.unice.fr](mailto:brenier@math.unice.fr)

vers  $B_4$  et  $A_4$  vers  $B_2$ . (En revanche, on n'est pas autorisé à déplacer  $A_1$  et  $A_2$  vers  $B_3$  en laissant  $B_4$  vacant, par exemple.) Il faudra donc chercher une solution optimale parmi toutes les arrangements possibles, c'est-à-dire parmi toutes les *bijections*  $\sigma$  des indices  $\{1, 2, 3, 4\}$  vers eux-mêmes. Le nombre d'arrangements possibles des  $N$  premiers entiers s'appelle le factoriel de  $N$ . Il vaut 24 pour  $N = 4$  (et...21794572800, soit plus de 20 milliards, pour  $N = 15$ ). La bijection correspondant à notre exemple s'écrit

$$\sigma(1) = 3, \quad \sigma(2) = 1, \quad \sigma(3) = 4, \quad \sigma(4) = 2.$$

{insertion d'une figure montrant le transport de 4 points dans le plan}  
Quant au coût à minimiser on le choisira comme la somme des distances entre les points de départ et les points d'arrivée, portées à une certaine puissance  $p$ , par exemple  $p = 1$  ou  $p = 2$ , que l'on fixe une fois pour toutes. Cela donne, pour l'exemple utilisé, la formule suivante pour le coût

$$d(A_1, B_3)^p + d(A_2, B_1)^p + d(A_3, B_4)^p + d(A_4, B_2)^p,$$

en notant  $d(P, Q)$  la distance entre deux points du plan  $P$  et  $Q$ . Plus généralement, le coût de transport associé à une bijection  $\sigma$  de  $N$  indices  $\{1, \dots, N\}$  est défini par:

$$\sum_{i=1}^N d(A_i, B_{\sigma(i)})^p.$$

Comme  $p$  est fixé, on est donc réduit à trouver la bijection  $\sigma$  des indices qui rend ce coût minimal. Notez que la puissance  $p$  ne joue aucun rôle si le nuage se réduit à un seul point, i.e.  $N = 1$ , ce qui nous ramène alors au cas des géodésiques habituelles. En revanche, dans le cas général, deux exposants  $p$  différents peuvent conduire à des solutions optimales différentes. Dans la suite, on se limitera au cas  $p = 2$  (le coût est donné par la somme des carrés des distances), alors que le problème traité par Monge correspondait au cas  $p = 1$  (où le coût est la somme des distances parcourues), et que certaines applications à l'économie requièrent d'autres valeurs de  $p$  (en particulier des valeurs fractionnaires situées entre 0 et 1 pour certains modèles). Ainsi formulé, notre problème de transport optimal appartient à une branche importante des mathématiques, l'*optimisation combinatoire*. Dans cette discipline, notre problème est considéré comme "facile". En effet, il existe des algorithmes qui permettent de trouver l'arrangement optimal en un nombre

d'opérations arithmétiques en  $O(N^3)$ . (Cela veut dire que, sur un ordinateur où les opérations s'effectuent séquentiellement, sans parallélisme, le temps de calcul pour  $N$  points divisé par  $N^3$  restera borné quelle que soit la taille de  $N$ , aussi bien pour  $N = 4$  que pour  $N = 1000000$ .) Rappelons qu'il y a factoriel  $N$  arrangements possibles et qu'il est déjà remarquable de rendre le temps de calcul cubique par rapport à  $N$ . (En effet, si pour  $N = 4$  le factoriel vaut 24 et reste modéré, pour  $N$  grand, il augmente grosso modo comme  $(N/e)^{N+1/2}$ , où  $e = 2.71828\dots$ , bien plus vite que  $N^3$  en tous cas, et devient rapidement ...astronomique. C'est toute la difficulté de l'optimisation combinatoire.) Citons un exemple d'application de notre problème, très récemment étudié par l'équipe de Jean-Michel Morel à l'ENS de Cachan. On dispose de l'image numérisée d'une peinture dont les couleurs sont défréchiées. Ces couleurs sont numériquement codées selon les couleurs élémentaires bleue, rouge et verte. A chaque pixel est donc associée une certaine proportion de bleu, de rouge ou de vert. En balayant les  $N$  pixels de l'image numérique, on obtient un nuage de  $N$  points dans l'espace tridimensionnel des couleurs. (Il s'agit d'un espace abstrait, pas de notre espace physique.) Par ailleurs, on a une idée de la palette de l'auteur, obtenue en considérant ses autres oeuvres. Si l'on peut en faire une statistique raisonnable, on pourra ainsi définir un nuage "de référence", constitué de  $N$  points dans le même espace de couleurs. Une technique raisonnable de rehaussement des couleurs consiste alors à effectuer le transport optimal, dans l'espace des couleurs, du nuage de points fourni par l'image défréchiée vers le nuage de point de référence. On déplacera alors en conséquence les valeurs des couleurs de chaque pixel de l'image défréchiée. Si, du point de vue de l'optimisation combinatoire théorique, notre problème n'est guère excitant (contrairement au fameux problème du voyageur de commerce), en pratique, les algorithmes connus sont peu performants lorsque  $N$  devient grand (au delà du millier, disons). On peut rêver d'un algorithme dont le coût de calcul croîtrait à peu près proportionnellement à  $N$  (comme c'est le cas, à une "correction logarithmique" près, d'algorithmes fameux, comme le tri rapide de  $N$  nombres réels, la transformée de Fourier discrète rapide "FFT", etc...). Les applications en seraient spectaculaires.

### **Transport optimal d'un nuage "continu"**

Comme souvent en mathématiques et en physique, la limite "continue" du problème discret précédemment discuté permet de mettre en jeu toute la force du calcul différentiel et intégral. Pour faciliter l'exposé, on considère des nuages de points distribués dans l'espace Euclidien à  $d$  dimension ( $d$  est

un entier  $1, 2, 3, \dots$ ) qui généralise notre espace physique à 3 dimensions. (Le lecteur pourra se limiter au cas du plan à  $d = 2$  dimensions.) Rappelons que, dans cet espace, les courbes géodésiques (les “chemins les plus courts”) sont simplement les lignes droites. Dorénavant, notre nuage de points sera décrit, respectivement au départ et à l’arrivée, par deux fonctions (deux “densités de probabilité”) donnant, en tout point  $x$  de l’espace, la densité du nuage, soit  $\alpha(x)$  au départ et  $\beta(x)$  à l’arrivée, deux nombres réels positifs ou nuls, dont l’intégrale par rapport à  $x$ , vaut 1.

Dans le cas de l’exposant  $p = 2$  et de l’espace Euclidien à  $d$  dimensions, le principal résultat théorique, obtenu dans la seconde moitié des années 1980, nous dit la chose suivante. Connaissant les deux fonctions de densité  $\alpha$  et  $\beta$ , on peut leur associer une autre fonction  $\phi$ , appelé “potentiel”, qui permet de définir la trajectoire optimale de chacune des particules constituant le nuage, de la densité  $\alpha$  vers la densité  $\beta$ . Plus précisément chaque particule, initialement placée au point  $x$ , sera transporté en ligne droite à vitesse constante  $v$ , la vitesse étant donnée par le gradient du potentiel  $\phi$  au point  $x$ . Rappelons que, pour une fonction  $\phi$  donné, le gradient de  $\phi$  peut se représenter assez facilement, au moins en dimension  $d = 2$ , en traçant les lignes de niveau de  $\phi$ , comme sur une carte d’état major où  $\phi(x)$  serait l’élévation du relief au point  $x$ . Le gradient est alors un vecteur perpendiculaire à la ligne de niveau passant par  $x$ , dont la longueur est inversement proportionnelle à la distance (infinitésimale) des lignes de niveau voisines. (Le gradient est d’autant plus fort que les lignes sont resserrées.) Ainsi, le transport optimal de la particule située au départ au point  $x$  s’effectuera en ligne droite, perpendiculairement à la ligne de niveau de  $\phi$  passant par  $x$ , et la vitesse de parcours  $v$  sera d’autant plus grande que les lignes de niveau se resserrent autour de  $x$ . Ainsi, en un temps  $t$  intermédiaire entre le temps de départ 0 et le temps d’arrivée 1, la position de la particule partie de  $x$  sera donnée par la formule:

$$x + tv, \quad v = D\phi(x)$$

où l’on note  $D\phi(x)$  le vecteur gradient de  $\phi$  au point  $x$  et  $v$  la vitesse de la particule. Il s’avère que les vitesses des particules dans le transport optimal “dérivent” d’un potentiel  $\phi$  précisément parce que l’on ignore l’individualité des particules constituant le nuage de points. (C’est l’équivalent, en “continu”, de l’arrangement optimal précédemment discuté dans le cas discret d’un nombre fini de particules.) Une propriété essentielle du potentiel est que deux particules issues de deux points différents  $x$  et  $y$  ne peuvent se

croiser au cours de leur transport. Autrement dit, il est impossible que

$$x + tD\phi(x) = y + tD\phi(y)$$

ait lieu pour  $t$  inférieur à 1 et  $x$  distinct de  $y$ . (L'égalité est acceptable pour  $t = 1$ .) (Mathématiquement, cela se traduit par la convexité de la fonction  $\phi(x)$  augmentée de la moitié de la norme euclidienne de  $x$  portée au carré.) Cette propriété est cruciale pour les applications discutées plus bas. Enfin, la théorie montre que le potentiel, ou plutôt son gradient, est uniquement déterminé par la donnée des fonctions de densité de départ et d'arrivée. Sous des hypothèses adéquates, le calcul différentiel traduit cette relation par l'équation différentielle ("aux dérivées partielles") suivante:

$$\alpha(x) = \beta(x + D\phi(x))\det(I + D^2\phi(x)),$$

dite de Monge-Ampère (sans que la relation avec le problème de Monge ait été, semble-t-il, établie lors de sa dénomination). (Dans cette écriture un peu barbare,  $D^2\phi(x)$  désigne la matrice carrée des dérivées partielles d'ordre 2 de  $\phi$ ,  $I$  la matrice identité correspondante et  $\det$  désigne le déterminant. La condition de convexité mentionnée plus haut revient à dire que la matrice  $I + D^2\phi(x)$  est, en tout point  $x$ , symétrique semi-définie positive.) L'équation de Monge-Ampère est bien connu des géomètres car elle permet, dans certains cas, de reconstruire une surface connaissant le produit de ses rayons de courbure (principaux) en tous points.

### Applications à l'analyse mathématique et à la géométrie

Comme souvent en mathématiques, un problème de "mathématiques appliquées" devient applicable aux mathématiques...pures. C'était déjà le cas du travail de Monge, qui, parti d'un problème de génie civil, en arrive à la théorie des enveloppes et des surfaces développables. Dans les années 1990, le théorème décrit dans le paragraphe précédent devient un outil de démonstration puissant et élégant pour démontrer de nombreuses "inégalités" de la géométrie et de l'analyse fonctionnelle, le plus souvent déjà connues, mais parfois nouvelles. Le cas le plus simple à décrire est la fameuse "inégalité isopérimétrique", solution du problème de Didon mentionné par Virgile. Etant donné une surface fermée d'aire  $S$  délimitant un volume  $V$ , dans l'espace Euclidien à 3 dimensions, on a l'inégalité:

$$36\pi V^2 \leq S^3.$$

De plus, cette inégalité devient une égalité si et seulement si la surface est sphérique. Rien de plus facile que de démontrer cette inégalité par la théorie du transport optimal. On considère les fonctions de densité uniforme et d'intégrale un, d'une part sur le domaine de volume  $V$ , d'autre part sur une boule de rayon 1, donc de volume  $B = 4\pi/3$ . Cela induit l'existence d'un potentiel  $\phi$  permettant le transport de la première vers la seconde, solution de l'équation de Monge-Ampère:

$$\frac{1}{V} = \det(I + D^2\phi(x)) \frac{1}{B},$$

en tout point  $x$  du domaine de volume  $V$ . Quelques lignes de calcul et une inégalité élémentaire de l'analyse (affirmant que la moyenne géométrique d'une suite de nombres réels positifs est toujours inférieure à sa moyenne harmonique) conduisent à l'inégalité isopérimétrique et à montrer que seule une sphère permet d'atteindre l'égalité.