Classification des catégories finies

Samer Allouch
Mémoire de **M2**, **15 juin 2007**

Introduction:

Le but du travail est d'étudier les correspondances, si elles existent, entre les catégories finies ordonnées d'ordre n et l'ensemble des matrices carrés de tailles n.
Etant donné deux objets distincts ou non : $\mathbf{X}_i$, $\mathbf{X}_j$, d' une catégorie finie ordonnée $\mathbf{A}$,

Soit $a_{ij} = |\mathbf{A}(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j)|$ le nombre des morphismes de $\mathbf{X}_i$ vers $\mathbf{X}_j$, évidement (a_{ij}) définie une matrice carrée $\mathbf{M}$, alors on a une seule matrice associée à $\mathbf{A}$.

D'autre part si on a une matrice carrée de taille n, on va discuter les conditions sur les coefficients de la matrice pour trouver les catégories qui lui sont associées.
En générale, il n'est pas nécessaire que les catégories existent, par exemple la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'a aucune catégorie associé, on essaye de classifier les matrices qui ne marchent pas et les matrices qui marchent avec leurs catégories associés.

On a démontré dans le plan quelque lemme et corollaire pour faciliter le problème, par exemple une matrice et son transposé ont le même état, en plus une matrice et son symétrie, c.à.d sa conjuguée par un élément du groupe symétrique, ont le même état, et si une matrice est telle que il existe une sous matrice qui ne marche pas alors la matrice principale ne marche pas. Par "même état" on veut dire que si l'une marche alors l'autre marche et inversement, en plus si elle marche alors les deux ensembles des catégories sont isomorphes.

Finalement on peut définir une catégorie à partir d'une matrice carré dans certains exemples, ca c'est très important car la définition d'une catégorie est un peu complexe, on même temps on va étudier l'influence des propriétés matricielles sur les catégories.

Voici quelques-uns des resultats.

Pour $\mathbf{M} = (2)$, $\mathbf{Cat}(\mathbf{M}) = \mathbf{Cat}^1(\mathbf{M}) \cup \mathbf{Cat}^f(\mathbf{M})$.

Pour $\mathbf{M = (3)}$, **Cat (M)**= $\mathbf{cat}_1\mathbf{(M)} \cup$ **Cat(M, Z/3Z)**$\cup$ $\mathbf{cat}_g^1$ **(M)** $\cup \mathbf{cat}_f^2$ **(M)** $\cup$ $\mathbf{cat}_f^3$ **(M)**$\cup$ $\mathbf{cat}_f^4$ **(M)** $\cup\mathbf{cat}_f^7$**(M).**

Soit **(M)**=$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et a≥1 alors **Cat (M)**= **{A** catégorie/ **Ob (A)={**X_1, X_2**}** et

$\mathbf{A}(X_1, X_1) = \{1_{X_1}\}$, $\mathbf{A}(X_1, X_2) = \{f_1, f_2 \dots f_a\}$, $\mathbf{A}(X_2, X_1) = \phi$,

$\mathbf{A}(X_2, X_2) = \{1_{X_2}\}$**}**.et toutes les catégories associes sont isomorphes, par la foncteur abstrait.

Soit **M=**$\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$tel que $2 \le a \le b$,alors **Cat (M)** $=\phi$.

Soit **M=**$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & 0 & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ tel que n$\in \mathbb{N}^*$, on a **Cat (M)**$\neq \phi$ pour tout n>0.

La matrice **M=**$\begin{pmatrix} n & n & n & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ne marche pas pour tout n>2, car la matrice **N=**$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$est un sous matrice de **M**.

Ce mémoire rapproche la théorie et la logique pratique.

Définition :

Une semi catégorie **A** consiste en une classe d'objet, une classe des morphismes et une loi de composition de morphismes $\circ$ satisfaisant les axiomes suivants ***:***

- À tout morphisme **f**$\in$ **A** correspond une paire d'objets de **A** appelés **source (f)** et **but (f)**. On note: **source (f)** $\to$ **but (f).**

- Pour toute pair d'objets **X, Y**$\in$ **A**, les morphismes **X**$\to$**Y** forment un ensemble appelé **Hom(X,Y)=$\mathcal{A}$ (X,Y)** .

- Pour toute paire de morphismes **f, g**$\in \mathcal{A}$, la composition **f, g** est définie si **source (f) =but(g) .**

- La composition est associative **: (f $\circ$g) $\circ$ h=f $\circ$ (g$\circ$h)** pour tout morphismes **f,g,h**$\in \mathcal{A}$ tels que **f $\circ$ g** et **g $\circ$ h** sont définis,

Une semi catégorie est appelée catégorie si en plus satisfaite le propriété suivant:

- Pour tout objet **X**$\in \mathcal{A}$, il existe u morphisme $\mathbf{id}_X : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ tel que pour tout **f, g**$\in \mathcal{A}$ avec **f: X$\rightarrow$Y, g: Y$\rightarrow$Z** on a **:**

$$\mathbf{f} \circ \mathbf{id}_X = \mathbf{f} \text{ et } \boldsymbol{id}_Y \circ \mathbf{g} = \mathbf{g} .$$

$\mathbf{id}_X$ est appelé morphisme identité de ***X*** et notée $\mathbf{id}_X$ par $\mathbf{1}_X$ **.**

Par la suite, on notera souvent la composition de morphismes **f $\circ$ g** de manière simplifiée comme **fg.**

La classe des objets est notée **Ob (A)** et la classe des morphismes est notée **Morphe(A).**

Remarque:

$\mathcal{A}$ **(X, Y)** est l'ensemble des morphismes **f: X$\rightarrow$Y,** $\mathcal{A}$ **(X, Y)=** $\{\mathbf{f}: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}\}$.

Si **X=Y** alors $\mathcal{A}$ **(X, Y) =** $\mathcal{A}$ **(X, X)** est l'ensemble des endomorphismes de **X** en plus notée par **End(X)=** $\mathcal{A}$ **(X,X)** .

Exemples:

(a) On appelle **Ens** la catégorie dont les objets sont les ensembles et les morphismes sont les applications ensemblistes avec la composition usuelle.

(b) La catégorie **Top** dont les objets sont les espaces topologiques, et dont les morphismes sont les applications continues avec la composition usuelle .

(c) La catégorie **Gp** dont les objets sont les groupes, et dont les morphismes sont les morphismes de groupes avec la composition usuelle.

(d) On se donne un ensemble **E** muni d'une relation réflexive et transitive$\mathcal{R}$, et on définit la La catégorie associée ainsi :

- objets : les éléments de l'ensemble ;
- flèches : pour tous objets ***e*** et ***f,*** il existe une flèche de ***e*** vers ***f*** si et seulement si **e** $\mathcal{R}$**f** et pas de flèche sinon ;
  - composition : la composée de deux flèche est la seule flèche qui réunit les deux extrémités (la relation est transitive !) ; l'identité est la seule flèche qui relie un objet à lui-même (la relation est réflexive !).

En particulier **E** ensemble ordonnée (**E,**$\leq$) est un catégorie dont les objets sont les éléments de **E** et pour tout i, j$\in$ ***I***, il y a un unique morphisme i$\rightarrow$j si i$\leq$j et aucun sinon avec la composition usuelle

(e) La catégorie **Cat** dont les objets sont les catégories, et dont les morphismes sont les foncteur, avec la composition usuelle.

(f) Pour tout anneau commutatif **R**, la catégorie $\mathbf{Mod}_R$ dont les objets sont les ***R***-modules et dont les morphismes sont les morphismes de **R**-modules, avec la composition usuelle.

(g) $\mathbf{Esp}_K$ (l'ensemble de **K-espces vectoriels)** catégorie dont les objets sont les **K-espces Vectoriels,** et dont les morphismes sont les applications linéaires ,avec la composition usuelle.

(h) Inj semi catégorie dont les objets sont les ensembles et les morphismes sont les injections ensemblistes sauf les applications identités ,et le composition usuelle.

Définition :

On dit qu'un morphisme de $\mathbf{A}$, **f:** $\mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ est un isomorphisme s'il existe un morphisme **g** *:* $\mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ dans $\mathbf{A}$ tel que $\mathbf{fg=id}_Y$ et $\mathbf{gf= id}_X$.*g* est alors noté $\mathbf{f}^{-1}$.
Si **f** est un isomorphisme, on dira aussi que **f** est inversible et que son inverse est f^{-1}.
Clairement $\mathbf{f}^{-1}$ est aussi unique et inversible et son inverse est $(\mathbf{f}^{-1})^{-1}=\mathbf{f}$. S'il existe un isomorphisme $\mathbf{f} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ entre deux objets de $\mathbf{A}$, nous dirons que ces objets sont isomorphes et nous noterons $\mathbf{X} \approx \mathbf{Y}$.

Définition :

Soit une catégorie $\mathbf{A}$ .La catégorie opposée à $\mathbf{A}$,notée $\mathbf{A}^{op}$,est la catégorie formée des mêmes objets que $\mathbf{A}$ mais des morphismes « opposés »définis comme suit :pour tout **X ,** **Y**$\in$ **A.**

$$\mathbf{A}^{op}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{A}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$$
$$\mathbf{f}^{op} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y} \;=\; \mathbf{f} : \mathbf{Y} \to \mathbf{X} .$$

Définition :

Une sous-catégorie $\mathbf{B}$ d'une catégorie $\mathbf{A}$ est une catégorie qui a la propriété
que tout objet $\mathbf{X} \in \mathbf{B}$ est aussi un objet de $\mathbf{A}$ et que tout morphisme dans $\mathbf{B}$ est aussi morphisme de $\mathbf{A}$ c. à .d $\mathbf{Ob(B)} \subseteq \mathbf{Ob(A)}$ **et** $\mathbf{Morphe(B)} \subseteq \mathbf{Morphe(A)}$ et
On notée $\mathbf{B} \angle \mathbf{A}$.
On dit que la sous-catégorie est plein si :

$$\forall\ \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbf{B}, \mathbf{B}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{A}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}).$$

Exemples:

(a) $\mathbf{Ens}_b$ la catégorie dont l'objet est les ensembles et les morphismes sont les applications ensemblistes bijectives,alors $\mathbf{Ens}_b$ sous-catégorie **Ens** ,donc $\mathbf{Ens}_b \angle$ **Ens.**

(b) ***Ab*** la catégorie dont les objets sont les groupes abéliens, et dont les morphismes sont les morphismes de groupes .on a **Ab** $\angle$ **Gp.**

(c) $\mathbf{Esp}_k^f$ (K-**espces vectoriels** de dimension **finis)** on a $\mathbf{Esp}_k^f \angle \mathbf{Esp}_K$.

Définition :

Soient deux catégories $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ .Un foncteur covariant $\mathbf{T}$ de $\mathbf{A}$ vers $\mathbf{B}$, notée
$\mathbf{T}: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, consiste en deux applications ensemblistes (notées également $\mathbf{T}$) :

1. Une application qui associe à tout objet $\mathbf{X} \in \mathbf{A}$ un objet $\mathbf{T}(\mathbf{X}) \in \mathbf{B}$.
2. Une application qui associe à tout morphisme $\mathbf{f} \in \mathbf{A}$, $f : X \to Y$ un morphisme $\mathbf{T}(\mathbf{f}) \in \mathbf{B}$ de la forme $\mathbf{T}(\mathbf{f}) : \mathbf{T}(X) \to \mathbf{T}(Y)$.

Ces deux applications satisfaisant les axiomes :

- $\mathbf{T}\,(\mathbf{id}_X) = \mathbf{id}_{T(X)}$ pour tout objet $\mathbf{X} \in \mathbf{A}$.
- $\mathbf{T}\,(\mathbf{fg}) = \mathbf{T}\,(\mathbf{f})\,\mathbf{T}\,(\mathbf{g})$. Pour tout morphismes **f, g**$\in$ **A** tels que **fg** est défini.

Par la suite, nous dirons simplement *foncteur* pour foncteur covariant.

Définition :

Un foncteur $\mathbf{T}: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ est fidèle (plein, pleinement fidèle), si pour tout $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbf{Ob}\,(\mathbf{A})$ l'application $\mathbf{T}: \mathbf{A}\,(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \rightarrow \mathbf{B}\,(\mathbf{T}(\mathbf{X}), \mathbf{T}(\mathbf{Y}))$ est injective (surjective, bijective).

Exemples:

- **(a)** Inclusions de catégories La catégorie **Ab** est incluse dans la catégorie **Gp**.Le foncteur d'inclusion I : **Ab** $\rightarrow$**Gp** est injectif sur les objets et pleinement fidèle sur les morphismes.
- **(b)** Foncteurs-oubli.L'oubli d'une partie de la structure définit un foncteur, souvent noté U ainsi, on a des foncteurs –oubli **Ab**$\rightarrow$ **Ens** ,même que **Gp**$\rightarrow$**Ens** et **Top**$\rightarrow$**Ens.** La foncteurs-oubli est fidèles.

Définition :

Un foncteur $\mathbf{T}: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ est essentiellement surjective, si pour tout $\mathbf{Y} \in \mathbf{Ob}\,(\mathbf{B})$ alors existe un objet $\mathbf{X} \in \mathbf{Ob}\,(\mathbf{A})$, tel que $\mathbf{Y} \approx \mathbf{T}(\mathbf{X})$.

Lemme :

Tout foncteur $\mathbf{T}: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ préserve les isomorphismes, i.e. si ***f*** est un isomorphisme de **A** alors $\mathbf{T}\,(\mathbf{f})$ est un isomorphisme de **B** et $\mathbf{T}\,(\mathbf{f}^{-1}) = \mathbf{T}\,(\mathbf{f})^{-1}$.

Définition :

Un morphisme $\mathbf{f}: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ d'une catégorie **A** est un monomorphisme si pour tout deux morphismes $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{X}$ de **A** tels que $\mathbf{f}\,\mathbf{h}_1 = \mathbf{f}\,\mathbf{h}_2$, on a $\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_2$.

Un morphisme $\mathbf{f}: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ d'une catégorie **A** est un épi morphisme si pour tout deux morphismes $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{Z}$ de **A** tels que $\mathbf{h}_1\,\mathbf{f} = \mathbf{h}_2\,\mathbf{f}$, alors $\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_2$.

Lemme :

Soient **f** et **g** deux morphismes composables.

(a) Si **f** et **g** sont des monomorphismes, alors de même **gf.**

(b) Si **gf** est un monomorphisme, alors **f** est un monomorphisme.

(c) Si **f** et ***g*** sont des épi morphismes, alors de même **gf.**

(d) Si **gf** est un épi morphisme, alors ***g*** est un épi morphisme.

Définition :

Une catégorie est équilibrée si les isomorphismes sont les morphismes qui sont à la fois mono épi(monomorphismes et épi morphismes).

Exemples:

- La catégorie des ensembles est équilibrée ;en effet ,les monomorphismes (resp.épimorphismes)sont précisément les application injectives (resp.surjectives), et les isomorphismes sont précisément les applications bijectives.

- Les foncteurs-oubli préservent les monomorphismes, mais ils ne préservent pas en général les épimorphismes.

- La catégorie des anneaux n'est pas équilibrée : l'inclusion $Z \rightarrow Q$ est à la fois mono-épi dans **Ann (catégorie des anneaux)** sans être un isomorphisme.

Définition :

Une catégorie **A** est petite si ses objets forment un ensemble.
Elle est finie s'il y a un nombre fini de morphismes (et donc d'objets).

Si **A** est finie, on notée **| Ob (A)|** =**N** le nombre d'objets de **A**, aussi si **X, Y**deux objets dans **A**, on notée **| A (X, Y) |**le nombre des morphismes de **X** vers **Y.** une catégorie finie ordonnée est un couple

Remarque :

Chaque catégorie finie représente par un chemin par exemple la catégorie dont les objets sont deux ensembles **A**, **B** et les morphismes sont les identités et une application de **A** vers **B**, le chemin de cette catégorie est :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[loop left, "1_A"] \arrow[r] & \mathbf{B} \arrow[loop right, "1_B"] \end{tikzcd}$$

Définition :

Si **A, B** sont deux catégorie, la catégorie produit **A**$\times$**B** est la catégorie dont les objets sont les couples **(X, Y)** avec **X**$\in$ **A** et **Y**$\in$ **B** et les morphismes sont les couples de morphisme . La composition est définie de manière évidente.

Définition :

Soient deux catégories **A** et **B**, on dit que **A** équivalence à **B**, s'il existe un foncteur **T: A**$\rightarrow$ **B** vérifie les deux propriété suivant :

1. le foncteur **T: A** $\rightarrow$ **B** est pleinement fidèle.
2. le foncteur **T: A** $\rightarrow$ **B** est essentiellement surjective.

Si **A** équivalence à **B** on note **A**$\cong$**B**

Proposition :

E est dit fini s'il existe $n \in \mathbb{N}$ entier naturel, $n \geq 1$ et une bijection $\boldsymbol{\delta} : \{1, 2 \dots n\} \rightarrow$ **E**.

Exemple:

Z/3**Z**= {0, 1,2} groupe finie alors il y a une bijection $\boldsymbol{\delta} : \{1, 2, 3\} \rightarrow$ **Z**/3**Z**.

Lemme :

$\mathbf{A}$ est une catégorie finie, alors existe une bijection

$$\boldsymbol{\delta} : \{1, 2 \ldots . N\} \to \mathbf{Ob}\ (\mathbf{A}).$$
$$i \to \delta(i) = x_i$$

D'après le lemme précédent $\boldsymbol{\delta}$ est bijective, On a $\forall X \in \mathbf{A}$ $\exists\, i \in \mathbb{N}$ tel que $\boldsymbol{\delta}\ (i) = x_i$, on note $\boldsymbol{\delta}\ (i) = x = x_i$, alors $\mathbf{Ob}\ (\mathbf{A}) = \{x_1, X_2 \ldots . X_N\}$.

Dans ce cas on note $a_{ij} = |\,\mathbf{A}\ (x_i, x_j)\,|$ évidente $a_{i\ j} \geq 0$.

Une catégorie finie ordonnée est un couple ($\mathbf{A}$, $\boldsymbol{\delta}$) où $\mathbf{A}$ est une catégorie finie et $\boldsymbol{\delta}$ bijective tel que $\boldsymbol{\delta} : \{1, 2 \ldots . N\} \to \mathbf{A}$.

Soit Σ_N le groupe symétrique de l'ensemble $\{1, 2 \ldots . N\}$.

Si $\sigma \in \Sigma_N$ et si ($\mathbf{A}$, $\boldsymbol{\delta}$) une catégorie finie ordonnée alors ($\mathbf{A}$, $\boldsymbol{\delta} \circ \sigma$) est une catégorie finie ordonnée avec $i \to (\delta \circ \sigma)\ (i) = x_{\sigma(i)}$

Remarque:

$\mathbf{A}$ est une catégorie fini d'ordre N, dans le cas où N= 1, on dit que $\mathbf{A}$ est **Monoïde**, c .à .d **Ob (A)=** $\{x\}$ et **Morph (A)**= **End (X)=** $\mathbf{A}$ **(X, X).**

Si $\mathbf{A}$ est une semi catégorie d'ordre 1 alors on dit que $\mathbf{A}$ est semi monoïde.

Définition :

Soit $\mathbf{A}$ est une catégorie fini d'ordre N, alors $\mathbf{Ob}\ (\mathbf{A}) = \{x_1, X_2 \ldots, X_N\}$ et $a_{ij} = |\,\mathbf{A}\ (X_i, x_j)\,|$ evident $a_{ij} \geq 0$ $\forall$ i, j $\in \{1, 2 \ldots . N\}$.

Une matrice associe à la catégorie $\mathbf{A}$ est la matrice définie par $m_{ij} = a_{ij}$, on note cette matrice par $\mathbf{M}_A \in \mathbf{M}_{N \times N}$ à **coefficients** dans $\mathbb{N}$.

$$\mathbf{M}_A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix} \text{tel que } a_{i,j} \in \mathbb{N}\ \forall\, i, j \in \{1, 2 \ldots . N\}.$$

Remarque:

$\mathbf{M}_A$ existe toujours et unique.

Exemples:

(a) Soit $\mathbf{A}$ est **Monoïde** d'ordre N= 1, **Ob (A)=** $\{x\}$ et **Morphe (A)**= $\mathbf{A}$ **(X, X)** $= \{f_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$, alors $a_{11} = 3$ donc $\mathbf{M}_A = (3)$.

(b) Soit $\mathbf{D}_N^{bij}$ est une catégorie fini d'ordre N, **Ob (A)=** $\{x_1, x_2, \ldots ., x_N\}$ où

$X_i = \{1, 2, \ldots, i\}\ \forall\, 1 \leq i \leq N$, dont les morphismes sont les bijections avec la composition useulle.

$X_1 = \{1\}$ $X_2 = \{1,2\}$………………………………. $X_N = \{1, 2, \ldots, N\}$.

Les morphismes sont:

On a $A(X_1, X_1) = \{\sigma_1^1\}$, $A(X_1, X_2) = \phi$, $A(X_2, X_2) = \{\sigma_1^2, \sigma_2^2\}$

en va remarque que $A(X_i, X_j) = \begin{cases} \phi & i \neq j \\ \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_i\} & i = j \end{cases}$. c.à.d si $i \neq j$ alors

$|A(X_i, X_j)| = 0$, et $|A(Xn, Xn)| = n!$.

Soit $M_N = \begin{pmatrix} 1! & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 2! & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & N! \end{pmatrix}$ la matrice associée à la catégorie D_N^{bij} .

Définition :

Soit $M = (a_{ij})$ tels que $1 \leq i, j \leq n$ matrice carrée, on appelle transposée de matrice M la matrice ${}^tM = (a_{ji})$ tels que $1 \leq i, j \leq n$.

Exemple:

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$ alors ${}^tM = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}$.

Définition :

Soit $M = (a_{ij})$ tels que $1 \leq i, j \leq n$ matrice carrée, et soit **I, J** deux sous-ensembles dans $\{1, 2, 3, \ldots, N\}$, alors la matrice $(a_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ est une sous matrice de M, on note cette matrice par $M_{I,J}$.

Remarque :

En pratique, une sous matrice est obtenue en supprimant un certain nombre de lignes et colonnes.

Exemples:

- Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = M_{I,J}$, où **I=** $\{1,2\}$ et **J=** $\{2,3\}$.

  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = M_{I,J}$, où **I=** $\{2,3\}$ et **J=** $\{1,2\}$.

Lemme :

Soit **A** est une catégorie fini d'ordre N, et soit **M** matrice associé à la catégorie **A**, alors ${}^{t}\mathbf{M}$ est la matrice associe à la catégorie $\mathbf{A}^{op}$ dual de **A**.

Preuve :

Soit **A** est une catégorie fini d'ordre N, alors **Ob (A)=** $\{X_1, X_2 \dots, X_N\}$ et $\mathbf{M}=(a_{ij})$ avec $a_{ij}=|\mathbf{A}(X_i, X_j)|$, soit **M'** une matrice associé à $\mathbf{A}^{op}$, $\mathbf{M'}=(b_{ij})$ tels que $b_{ij}=|\mathbf{A}^{op}(X_i, X_j)|=|\mathbf{A}(X_j, X_i)|=a_{ji}$, donc $\mathbf{M'}={}^{t}\mathbf{M}$.

Proposition :

Soit **A** est une catégorie fini d'ordre N, soit **B** une sous-catégorie plein de **A**, **M** matrice associé à la catégorie **A**, **M'** matrice associé à la catégorie **B**, alors **M'** est sous matrice de **M**.

Preuve :

Soit $\mathbf{M}=(a_{ij})$ si **A** est une catégorie fini d'ordre N, **Ob (A)=** $\{X_1, X_2 \dots, X_N\}$ avec $a_{ij}=|\mathbf{A}(X_i, X_j)|$ et **B** une sous-catégorie plein de **A** alors il existe $I \subset \{1,2,\dots, N\}$, $I=\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ et **Ob (B)=** $\{X_{i_1}, X_{i_2} \dots, X_{i_k}\}$, soit $\mathbf{T}: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un foncteur est pleinement fidèle et $\forall (X_{i_j}, X_{i_e}) \in$ **Ob (B)** $\times$ **Ob (B)**,

$|\mathbf{B}(X_{i_j}, X_{i_e})| = |\mathbf{A}(X_{i_j}, X_{i_e})| = a_{i_j\, i_e}$, alors **M'** est une sous matrice de **M**.

Définition :

Soit **A** et **B** deux catégories finis ordonnées d'ordre N, on dit que **A** et **B** sont isomorphe s'il existe un foncteur $\mathbf{T}: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ vérifie les deux propriété suivant :

1. le foncteur $\mathbf{T}: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ est pleinement fidèle.
2. l'application $\mathbf{T}$: **Ob (A)** $\to$ **Ob (B)** est bijective.

Si **A** et **B** sont isomorphe on note $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$.

Évidemment si $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$ alors $\mathbf{M}_A = \mathbf{M}_B$.

Définition :

Soit $\mathbf{M}=(a_{i,j})$un **matrice** carré $n \times n$ à **coefficients** dans $\mathbb{N}$, on dit **A** catégorie associé à **M** est une catégorie finie ordonnée d'ordre n et $\forall\ X_i, X_j \in$ **Ob (A)** $\Rightarrow |A(X_i, X_j)| = a_{i,j}$.

Exemples:

Soit $\mathbf{M}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit **A** catégorie finie ordonnée d'ordre 2 tel que **Ob (A)=** $\{X_1, X_2\}$

$\mathbf{A}(X_1, X_1) = \{\mathbf{1}_1\}$, $\mathbf{A}(X_2, X_2) = \{\mathbf{1}_2\}$ et $\mathbf{A}(X_1, X_2) = \{\mathbf{f}, \mathbf{g}\}$, $\mathbf{A}(X_2, X_1) = \phi$ alors $\mathbf{A}$ catégorie associé à $\mathbf{M}$ car $|\mathbf{A}(X_i, X_j)| = a_{i,j}$ $\forall$ i, j $\in$ {1,2}.

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[loop left, "\mathbf{1}_1"] \arrow[r, shift left, "\mathbf{f}, \mathbf{g}"] \arrow[r, shift right] & X_2 \arrow[loop right, "\mathbf{1}_2"] \end{tikzcd}.$$

Remarque :

Soit $\mathbf{M} = (a_{ij})$ tel que $a_{i,j} \in \mathbb{N}$ $\forall$ i, j $\in \{1, 2 \ldots N\}$, alors si **A, B** deux catégories isomorphe, et $\mathbf{A} \in$ **Cat (M)** alors $\mathbf{B} \in$ **Cat (M)**, si on choix l'ordre des objets convenablement 'facile à démontrer'.

Définition :

Soit **A** catégorie d'ordre fini d'ordre N, On dit que **A** est squelettiques si **X, Y** deux objets sont isomorphes alors X=Y.

Corollaire :

Deux catégories **A** et **B** qui sont squelettiques et équivalences, ont la même matrice i.e. $\mathbf{M}_A = \mathbf{M}_B$.

Définition :

Soit $\mathbf{M} = (a_{i,j})$un **matrice** carré $n \times n$ à **coefficients** dans $\mathbb{N}$, On note

Cat (M)= $\{$**A** catégorie finie ordonnée d'ordre n / **A** catégorie associé à **M**$\}$, alors **Cat (M)** $\neq \phi$ ou non.

Exemples:

Soit $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, **Cat (M)** $\neq \phi$ car la catégorie dont les objets sont deux ensembles A,B et les morphismes sont les identités sont des catégories associées à **M** .

Soit $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 32 \\ 0 & 0 & 9 & 10 \end{pmatrix}$ on a **Cat (M)** $= \phi$ après la démonstration aussi **Cat (0)** $= \phi$

Remarque :

Si $\mathbf{M} = (a_{i,j})$ un **matrice** carré $n \times n$ à **coefficients** dans $\mathbb{N}$, alors peut-être

$|$**Cat (M)**$| \geq 0$.

Constructions des monoïdes.

1. si **A** est semi monoïde avec n morphismes alors **A+id** est une monoïde a n+1 morphismes, en rajoutant formellement l'identité. Attention, si **A** est un monoïde alors l'identité dans **A+id** est différent de l'ancien identité de **A**.
2. si **A** est monoïde avec n morphismes alors **A+**$\perp$ est monoïde avec n+1 morphismes. On rajoute formellement un élément $\perp$ avec ($\mathbf{f}\circ\perp$)= ($\perp\circ\mathbf{f}$)=$\perp$ pour tout f morphisme dans **A+**$\perp$ **.** Ici l'identité de **A+**$\perp$ est la même que l'identité de **A**.
3. Si **X** est un ensemble fini on définit un semi monoïde **prem(X)** dont l'ensemble des morphismes consiste les éléments de **X** et $(x\circ y)=x$.
4. Si **X** est un ensemble fini on définit un semi monoïde **dern(X)** dont l'ensemble des morphismes consiste les éléments de **X** et $(x\circ y)=y$.
5. Si **X** est un ensemble fini et **d**$\in$ **X** on définit un semi monoïde **cte(X, d)** dont l'ensemble des morphismes consiste les éléments de **X** et $(x\circ y)=$**d**.
6. si **G** est un groupe fini par exemple **Z/nZ** alors **G** est un monoïde.

Exemples:

- ϕ **= prem(**ϕ**)=dern(**ϕ**)** est l'unique semi monoïde sans aucun morphisme **.**
- **(1) =** ϕ **+id =** $\phi+\perp$ est l'unique monoïde avec un seul morphisme**.**
- Ci-dessous pour le cas **M** = (2),où $\mathbf{f}^2$ **=1, Cat**^{1}**(M)** consiste des monoïdes isomorphes au groupe **Z/2Z .**
- Ci-dessous pour le cas **M** = (2), où $\mathbf{f}^2$ **=f, Cat**^{f} **(M)** consiste des monoïdes isomorphes a **(1)** $+\perp$ (avec **f=**$\perp$) ou a **(1)** + **id** (avec **f**$\in$ **(1)**) **.O**n appellera ce monoïde **proj**(2) puisque **f** est un projecteur.

On va discuter les catégories associées à **M**.

Monoïdes a 1 morphismes.

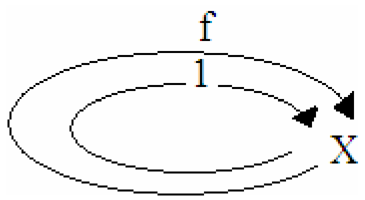
Soit **M** = **(1)**, soit $\mathbf{A}_X$ catégorie associé à **M** alors cette catégorie ordonnée d'ordre 1 et les morphismes seulement l'identité soit **Ob** $(\mathbf{A}_X)=\{X\}$ et **A** (X, X)= $\{\mathbf{1}_X\}$ son chemin est:

$$X \arrow[loop, "\mathbf{1}_X"]$$

Alors **Cat (M)**= $\{\mathbf{A}_X$ catégorie tel que **Ob** $(\mathbf{A}_X)=\{X\}$ et **A** (X, X)= $\{\mathbf{1}_X\}\}$, alors $\mathbf{A}_X\equiv\mathbf{A}_Y$ pour tout $\mathbf{A}_X, \mathbf{A}_Y\in$ **Cat (M)**.

Monoïdes a 2 morphismes.

Soit $\mathbf{M} = (\mathbf{2})$, soit $\mathbf{A}$ associé à $\mathbf{M}$ alors cette catégorie ordonnée d'ordre 1 et les morphismes seulement l'identité soit $\mathbf{Ob\ (A)=\{x\}}$ et $\mathbf{A}\ (X, X)= \{\mathbf{1, f}\}$ son chemin est:



Comme la catégorie est monoïde Le tableau de loi composition est donné par deux cases :

X	X	X

Alors il y a un seul chemin c.à.d :

$$X \xrightarrow{f} X \xrightarrow{f} X$$

Alors il y a deux discussions sur le $\mathbf{f}^2$:

1. $\mathbf{f}^2 = \mathbf{1}$.
2. $\mathbf{f}^2 = \mathbf{f}$.

Le tableau de l'associativité est donné par trois cases :

X	X	X	X

Comme la catégorie est monoïde alors il y a un seul chemin:

$$X \xrightarrow{f} X \xrightarrow{f} X \xrightarrow{f} X$$

Donc il y a un seul équation associative est *:* $(\mathbf{f} \circ \mathbf{f}) \circ \mathbf{f} = \mathbf{f} \circ (\mathbf{f} \circ \mathbf{f})$ c.à.d $\mathbf{f}^2\mathbf{f} = \mathbf{f}\,\mathbf{f}^2$

Pour $\mathbf{f}^2 = \mathbf{1}$, la matrice $\mathbf{M}$ est marche car l'équation associative est varie en effet :

On a $(\mathbf{f} \circ \mathbf{f}) \circ \mathbf{f} = \mathbf{1} \circ \mathbf{f} = \mathbf{f}$ et $\mathbf{f} \circ (\mathbf{f} \circ \mathbf{f}) = \mathbf{f} \circ \mathbf{1} = \mathbf{f}$.

Soit $\mathbf{Cat}^1(\mathbf{M}) = \{$les monoïdes à deux morphismes $\{\mathbf{1, f}\}$ et aussi $\mathbf{f}^2 = \mathbf{1}\}$, on remarque si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux catégories dans $\mathbf{Cat}^1(\mathbf{M})$ alors $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$ cette isomorphisme est donné par la foncteur $\mathbf{T: A} \longrightarrow \mathbf{B}$ avec $\mathbf{Ob\ (A)} = \{\mathbf{x}_A\}$ et $\mathbf{A}\ (\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_A) = \{\mathbf{1}_A, \mathbf{f}_A\}$

$x_A \to \mathbf{T}(\mathbf{x}_A) = \mathbf{x}_B$ $\qquad$ $\mathbf{Ob\ (B)} = \{\mathbf{x}_B\}$ et $\mathbf{A}\ (\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_B) = \{\mathbf{1}_B, \mathbf{f}_B\}$

$\mathbf{1}_A \to \mathbf{1}_B$

$\mathbf{f}_A \to \mathbf{T}(\mathbf{f}_A) = \mathbf{f}_B$

On a $\mathbf{T}(\mathbf{f}_A^2) = \mathbf{T}(\mathbf{1}_A) = \mathbf{1}_B = \mathbf{f}_A^2 = \mathbf{T}(\mathbf{f}_A)\,\mathbf{T}(\mathbf{f}_A)$.

Soit $\mathbf{Cat}^f(\mathbf{M}) = \{$les monoïdes à deux morphismes $\{\mathbf{1, f}\}$ et aussi $\mathbf{f}^2 = \mathbf{f}\}$, on remarque si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux catégories dans $\mathbf{Cat}^f(\mathbf{M})$ alors $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$ cette isomorphisme est donné par la Foncteur $\mathbf{T: A} \longrightarrow \mathbf{B}$ avec $\mathbf{Ob\ (A)} = \{\mathbf{x}_A\}$ et $\mathbf{A}\ (\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_A) = \{\mathbf{1}_A, \mathbf{f}_A\}$

$\mathbf{x}_A \to \mathbf{T}(\mathbf{x}_A) = \mathbf{x}_B$ $\qquad$ $\mathbf{Ob\ (B)} = \{\mathbf{x}_B\}$ et $\mathbf{A}\ (\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_B) = \{\mathbf{1}_B, \mathbf{f}_B\}$

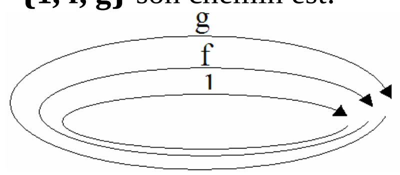
$$\mathbf{1}_A \to \mathbf{1}_B$$
$$\mathbf{f}_A \to \mathbf{T}(\mathbf{f}_A) = \mathbf{f}_B$$

On a $\mathbf{T}(\mathbf{f}_A^2) = \mathbf{T}(\mathbf{f}_A) = \mathbf{f}_B = \mathbf{f}_B^2 = \mathbf{T}(\mathbf{f}_A)\,\mathbf{T}(\mathbf{f}_A)$.

Finalement $\mathbf{Cat}\ (\mathbf{M}) = \mathbf{Cat}^1(\mathbf{M}) \cup \mathbf{Cat}^f(\mathbf{M})$.

Monoïdes a 3 morphismes.

Soit $\mathbf{M} = (\mathbf{3})$, soit $\mathbf{A}$ catégorie associé à $\mathbf{M}$ alors cette catégorie ordonnée d'ordre 1 et soit $\mathbf{Ob}\ (\mathbf{A}) = \{x\}$ et $\mathbf{A}\ (X, X) = \{\mathbf{1}, \mathbf{f}, \mathbf{g}\}$ son chemin est:



X.

Comme la catégorie est monoïde le tableau de loi composition est donné par deux cases :

X	**X**	**X**

Alors il y a un seul chemin :

$$X \xrightarrow{f,g} X \xrightarrow{f,g} X$$

On donné le discutions par le tableau suivant:

$\circ$	**f**	**g**
f	**1, f, g**	**1, f, g**
g	**1, f, g**	**1, f, g**

Il y a 4 formules pour la loi de composition $\circ$, les formules sont :

$\mathbf{f}^2$	$\mathbf{g}^2$	**fg**	**gf**
1, f, g	**1, f, g**	**1, f, g**	**1, f, g**

Donc il y a 81 cas pour les discutions.
Mais pour les équations de l'associativité comme le catégorie est monoïde alors un seul Chemin définie par:

$$X \xrightarrow{f,g} X \xrightarrow{f,g} X \xrightarrow{f,g} X$$

Alors les équations associatives sont:

1. $(\mathbf{f} \circ \mathbf{f}) \circ \mathbf{f} = \mathbf{f} \circ (\mathbf{f} \circ \mathbf{f})$
2. $(\mathbf{g} \circ \mathbf{g}) \circ \mathbf{g} = \mathbf{g} \circ (\mathbf{g} \circ \mathbf{g})$
3. $(\mathbf{f} \circ \mathbf{g}) \circ \mathbf{f} = \mathbf{f} \circ (\mathbf{g} \circ \mathbf{f})$.
4. $(\mathbf{f} \circ \mathbf{f}) \circ \mathbf{g} = \mathbf{f} \circ (\mathbf{f} \circ \mathbf{g})$.
5. $(\mathbf{f} \circ \mathbf{g}) \circ \mathbf{g} = \mathbf{f} \circ (\mathbf{g} \circ \mathbf{g})$.
6. $(\mathbf{g} \circ \mathbf{f}) \circ \mathbf{g} = \mathbf{g} \circ (\mathbf{f} \circ \mathbf{g})$.
7. $(\mathbf{g} \circ \mathbf{f}) \circ \mathbf{f} = \mathbf{g} \circ (\mathbf{f} \circ \mathbf{f})$.

8. $(g\circ g)\circ f = g\circ (g\circ f)$.

En va étudier les cas para port aux 3 cas de f^2 .

1. **Pour $f^2=1$:**

   Si **gf=1** pas de catégorie car $gf=1 \Rightarrow gf^2=f \Rightarrow g=f$ impossible $(f\neq g)$.

   Si **gf=f** pas de catégorie car $gf=f\Rightarrow gf^2=f^2=1=g$ impossible $(g\neq 1)$.

   Si **gf=g** alors il y a quelque cas sur g^2 **:**

   Pour $g^2=1$ pas de catégorie car $gf=g\Rightarrow f=g^2f=g^2=1$ impossible $(f\neq 1)$.

   Pour $g^2=f$ pas de catégorie car $1=g^2f=g^2=f$ impossible $(f\neq 1)$.

   Pour $g^2=g$ il y a 3cas sur **fg:**

   a. fg=1 pas de catégorie car $g=(fg)\,g=fg^2=fg=1$ impossible $(g\neq 1)$.

   b. fg=g la matrice est marche car toutes les équations associative sont marchent ,il s'agit a $\mathbf{Z/2Z}+\perp$.

   c. fg=f pas de catégorie car $g=f^2g=f(fg)=f^2=1$ impossible $(g\neq 1)$.

Soit $\mathbf{cat}_1(\mathbf{M})=\{\mathbf{A}$ catégorie monoïde a 3 morphismes $\{1,f,g\}$tel que $f^2=1$et $fg=gf=g^2=g\}$.

Si **A, B** deux catégories dans $\mathbf{cat}_1(\mathbf{M})$,alors $\mathbf{A}\equiv\mathbf{B}$ l'isomorphisme est définie par la foncteur suivant:

$\mathbf{T: A \longrightarrow B}$ avec $\mathbf{Ob\ (A)}=\{x_A\}$ et $\mathbf{A}\,(x_A, x_A)=\{1_A, f_A, g_A\}$

$x_A \to \mathbf{T}(x_A)=x_B$ $\mathbf{Ob\ (B)}=\{x_B\}$ et $\mathbf{A}\,(x_B, x_B)=\{1_B, f_B, g_B\}$

$1_A \to 1_B$

$f_A, g_A \to \mathbf{T}(f_A, g_A)=f_B, g_B$

On a **T** est isomorphisme c.à.d $\mathbf{A}\equiv\mathbf{B}$.

2. **Pour $f^2=g$:**

   Si $gf=1\Rightarrow g^2=gf^2=f$.

   Pour **fg=1** la matrice est marche il s'agit du groupe **Z/3Z**.

   Pour **fg=g** pas de catégorie car $g=(gf)\,g=g\,(fg)=g^2=f$ impossible $(f\neq g)$.

   Pour **fg=f** pas de catégorie car $g=(gf)\,g=g\,(fg)=gf=1$ impossible $(g\neq 1)$.

   Si $gf=f \Rightarrow g^2=gf^2=f^2=g$.

   Pour **fg=1** pas de catégorie car $1=fg=(gf)\,g=g\,(fg)=g$ impossible $(g\neq 1)$.

   Pour **fg=g** pas de catégorie car $f=gf=(fg)\,f=f\,(gf)=f^2=g$ impossible $(f\neq g)$.

   Pour **fg=f** la matrice est marche car toutes les équations associatives sont Marchent, il s'agit de **Z/2Z+id.**

$\mathbf{Cat(M,}\ \mathbf{Z/3Z})=\{\mathbf{A}$ monoïde les morphismes sont $\{1, f, g\}$ tel que $f^2=g, g^2=f, fg=gf=1\}$.

$\mathbf{cat}_g^1\ (\mathbf{M})=\{\mathbf{A}$ monoïde les morphismes sont $\{1, f, g\}$ tel que $f^2=g^2=g, fg=gf=f\}$.

Si **A, B** deux catégories dans $\mathbf{cat}_g^1\ (\mathbf{M})$, alors $\mathbf{A}\equiv\mathbf{B}$ l'isomorphisme est définie par la foncteur suivant:

$\mathbf{T: A \longrightarrow B}$ avec $\mathbf{Ob\ (A)}=\{x_A\}$ et $\mathbf{A}\,(x_A, x_A)=\{1_A, f_A, g_A\}$

$x_A \to \mathbf{T}(x_A)=x_B$ $\mathbf{Ob\ (B)}=\{x_B\}$ et $\mathbf{A}\,(x_B, x_B)=\{1_B, f_B, g_B\}$

$1_A \to 1_B$

$f_A, g_A \to \mathbf{T}(f_A, g_A)=f_B, g_B$

On a **T** est isomorphisme c.à.d $\mathbf{A}\equiv\mathbf{B}$.

Si **gf=g** $\Rightarrow$ **g^2=gf^2=g.**

Pour **fg=1** la matrice ne marche pas car **f= (fg) f=f (gf)=fg=1 (f$\neq$1).**

Pour **fg=f** la matrice ne marche pas car **g=f^2=(fg)f=f(gf)=fg=f (f$\neq$g).**

Pour **fg=g** la matrice est marche car toutes les équations associatives sont marchent, il s'agit a **Cte({f,g},g)+id.**

cat_g^2 (M)= $\{$**A** monoïde les morphismes sont $\{$**1, f, g**$\}$ tel que **f^2=g^2=fg=gf=g**$\}$.

Si **A, B** deux catégories dans **cat_g^2 (M)**, alors **A$\equiv$B** l'isomorphisme est définie par la foncteur suivant:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{T: A \longrightarrow B} \qquad \text{avec } \mathbf{Ob\ (A)}= \{X_A\} \text{ et } \mathbf{A}\ (X_A, X_A)= \{1_A, f_A, g_A\}\\
&\quad X_A \to \mathbf{T}(X_A)=X_B \qquad \mathbf{Ob\ (B)}= \{X_B\} \text{ et } \mathbf{A}\ (X_B, X_B)= \{1_B, f_B, g_B\}\\
&\quad 1_A \to 1_B\\
&\quad f_A, g_A \to \mathbf{T}(f_A, g_A)= f_B, g_B
\end{aligned}
$$

On a **T** est isomorphisme c.à.d **A$\equiv$B.**

3. **Pour f^2=f:**

Si **gf=1** ne marche pas car **gf^2=f=gf=1** impossible car **(f$\neq$1).**

Si **gf=f** alors il y a quelque cas sur **g^2:**

Pour **g^2=1** on a 3cas sur **fg:**

a. fg=1 ne marche pas car **1=fg=f^2g=f (fg)=f (f$\neq$1).**

b. fg=g ne marche pas car **f=fg^2=g^2=1(f$\neq$1).**

c. fg=f la matrice marche car les équations associatives sont marchent, il s'agit de **Z/2Z** $+\perp$.

cat_f^1 (M)= $\{$**A** monoïde les morphismes sont $\{$**1, f, g**$\}$ tel que **f^2=fg=gf=f** et g^2=1$\}$.

Si **A, B** deux catégories dans **cat_f^1 (M)**, alors **A$\equiv$B** l'isomorphisme est définie par la foncteur défini comme précédant.

Pour **g^2=f** on a 3cas sur **fg:**

a. fg=1 ne marche pas car **1=fg=f^2g=f (fg)=f (f$\neq$1).**

b. fg=f la matrice marche car l'associative est vraie, il s'agit de **Cte({f,g},f)+id.**

c. fg=g ne marche pas car **g=fg= (gf) g=g (fg)=g^2=f (f$\neq$g).**

cat_f^2 (M)= $\{$**A** monoïde les morphismes sont $\{$**1, f, g**$\}$ tel que **f^2=fg=gf=f** =**g^2**$\}$.

Si **A, B** deux catégories dans **cat_f^2 (M)**, alors **A$\equiv$B** l'isomorphisme est définie par la foncteur défini comme précédant.

Pour **g^2=g** on a 3cas sur **fg:**

a. fg=1 ne marche pas car **1=fg=f^2g=f (fg)=f (f$\neq$1).**

b. fg=g la matrice marche car l'associative est vraie il s'agit de **der ({f,g})+id.**

c. fg=f la matrice marche car l'associative est vraie. il s'agit de **proj**(2) $+\perp$.

$\mathbf{cat}_f^3$ **(M)**= $\{$**A** monoïde les morphismes sont $\{1, f, g\}$ tel que f^2=**gf=f** et **fg**=g^2=**g** $\}$.

Si **A, B** deux catégories dans $\mathbf{cat}_f^3$ **(M)**, alors $A \equiv B$ l'isomorphisme est définie par la foncteur défini comme précédant.

$\mathbf{cat}_f^4$ **(M)**= $\{$**A** monoïde les morphismes sont $\{1, f, g\}$ tel que f^2=**gf=fg=f** et g^2=**g** $\}$.

Si **A, B** deux catégories dans $\mathbf{cat}_f^4$ **(M)**, alors $A \equiv B$ l'isomorphisme est définie par la foncteur défini comme précédant.

Si **gf=g** alors il y a quelque cas sur g^2 **:**

Pour g^2**=1** ne marche pas car **gf=g**$\Rightarrow g^2 f=g^2 \Rightarrow f=1$.

Pour g^2**=f** on a 3 cas sur **fg:**

a. fg=1 ne marche pas car $1=fg=f^2 g=f\,(fg)=f\ (f\neq 1)$.

b. fg=g la matrice marche car l'associative est vraie .il s'agit de **Z/2Z+id.**

c. fg=f ne marche pas car $f=(g^2)\,g=g\,(g^2)=gf=g\ (f\neq g)$.

Pour g^2**=g** on a 3 cas sur **fg:**

a. fg=1 ne marche pas car $1=fg=f^2 g=f\,(fg)=f\ (f\neq 1)$.

b. fg=g la matrice marche car l'associative est vraie. Il s'agit de **proj**(2) $+\perp$.

c. fg=f la matrice marche il s'agit de **prem** $(\{f, g\})$ **+id**

$\mathbf{cat}_f^5$ **(M)**= $\{$**A** monoïde les morphismes sont $\{1, f, g\}$ tel que $f^2 = g^2$=**f,gf=fg=g** $\}$.

Si **A, B** deux catégories dans $\mathbf{cat}_f^5$ **(M)**, alors $A \equiv B$ l'isomorphisme est définie par la foncteur défini comme précédant.

$\mathbf{cat}_f^6$ **(M)**= $\{$**A** monoïde les morphismes sont $\{1, f, g\}$ tel que $f^2 = g^2$=**gf=f,fg=g** $\}$.

$\mathbf{cat}_f^7$ **(M)**= $\{$**A** monoïde les morphismes sont $\{1, f, g\}$ tel que $f^2 = g^2$=**gf=gf,fg=f** $\}$.

Si **A, B** deux catégories dans $\mathbf{cat}_f^6$ **(M)**, alors $A \equiv B$ l'isomorphisme est définie par la foncteur défini comme précédant.

Alors **Cat (M)**= $\mathbf{cat}_1$**(M)**$\cup$ **Cat(M, Z/3Z)**$\cup$ $\mathbf{cat}_g^1$ **(M)**$\cup$ $\mathbf{cat}_g^2$ **(M)** $\cup$ $\mathbf{cat}_f^1$ **(M)**$\cup\mathbf{cat}_f^2$ **(M)** $\cup$ $\mathbf{cat}_f^3$ **(M)**$\cup$ $\mathbf{cat}_f^4$ **(M)**$\cup$ $\mathbf{cat}_f^5$ **(M)** $\cup$ $\mathbf{cat}_f^6$ **(M)** $\cup\mathbf{cat}_f^7$**(M).** Cependant

$\mathbf{cat}_f^1$ **(M)=** $\mathbf{cat}_1$**(M),** $\mathbf{cat}_g^2$ **(M)=** $\mathbf{cat}_f^2$ **(M),** $\mathbf{cat}_f^5$ **(M)=** $\mathbf{cat}_g^1$ **(M),** $\mathbf{cat}_f^4$**(M)=** $\mathbf{cat}_f^6$ **(M).** Donc on peut écrire

Cat (M)= $\mathbf{cat}_1$**(M)**$\cup$ **Cat(M, Z/3Z)**$\cup$ $\mathbf{cat}_g^1$ **(M)** $\cup\mathbf{cat}_f^2$ **(M)** $\cup$ $\mathbf{cat}_f^3$ **(M)**$\cup$ $\mathbf{cat}_f^4$ **(M)** $\cup\mathbf{cat}_f^7$**(M).**

Soit **(M)**=$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

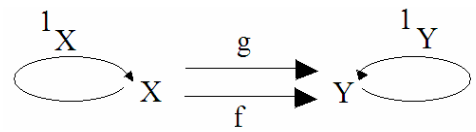
Pour a=0 alors **(M)**=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Cat (M)= **{A** catégorie ordonnée d'ordre 2 et les morphismes seulement les identités**}.**

Pour a=2 alors **(M)**=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soit **A** catégorie associée à **M** alors cette catégorie ordonnée d'ordre 2 tel que **Ob (A)**=$\{X_1, X_2\}$ et $\mathbf{A}(X_1, X_1)=\{1_{X_1}\}$, $\mathbf{A}(X_1, X_2)=\{f, g\}$,

$\mathbf{A}(X_2, X_1)=\phi$, $\mathbf{A}(X_2, X_2)=\{1_{X_2}\}$,

Le chemin de cette catégorie est donné par la figure suivant:



La table de loi composition est formé par:

X_1, X_2	X_1, X_2	X_1, X_2

Comme $\mathbf{A}(X_2, X_1)=\phi$ alors il n'y a pas des équations de la loi composition, aussi pas des équations de l'associativité.

Donc **Cat (M)**= $\{\mathbf{A}$ catégorie/ **Ob (A)**=$\{X_1, X_2\}$ et $\mathbf{A}(X_1, X_1)=\{1_{X_1}\}$, $\mathbf{A}(X_1, X_2)=\{f, g\}$, $\mathbf{A}(X_2, X_1)=\phi$, $\mathbf{A}(X_2, X_2)=\{1_{X_2}\}\}$. Si **A, B** deux catégories dans **Cat (M)** alors $\mathbf{A}\equiv\mathbf{B}$ l'isomorphisme est définie par la foncteur défini précédant.

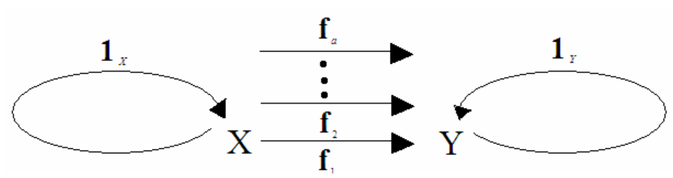
Corollaire:

Soit **(M)**=$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et a≥1 alors **Cat (M)**= $\{\mathbf{A}$ catégorie/ **Ob (A)**=$\{X_1, X_2\}$ et

$\mathbf{A}(X_1, X_1)=\{1_{X_1}\}$, $\mathbf{A}(X_1, X_2)=\{f_1, f_2 \ldots f_a\}$, $\mathbf{A}(X_2, X_1)=\phi$,

$\mathbf{A}(X_2, X_2)=\{1_{X_2}\}\}$.et toutes les catégories associes sont isomorphes, par la foncteur abstrait.

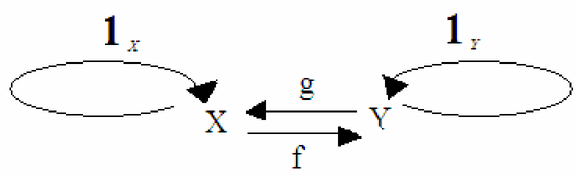
Le chemin de cette matrice est donné par la figure suivante:



Remarque:

Cat $({}^t\mathbf{M})$= **Cat (M)** dans le cas où **(M)**=$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit **M**=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, le chemin associé à cette matrice est :



Soit **A** catégorie dans **cat (M)** ,alors **A** est ordonnée d'ordre 2 tel que **Ob(A)**=$\{X_1, X_2\}$ avec $A(X_1, X_1)=\{1_{X_1}\}$, $A(X_2, X_2)=\{1_{X_2}\}$, $A(X_1,X_2)=\{f\}$, $A(X_2, X_1)=\{g\}$,d'après le chemin il y a deux cas de la loi de composition **fg** et **gf**, en plus **fg**$\in$ $A(X_2, X_2)=\{1_{X_2}\}$, et **gf**$\in$ $A(X_1, X_1)=\{1_{X_1}\}$,,alors $fg=1_{X_2}$ et $gf=1_{X_1}$ ce qui donne $f=g^{-1}$.

Les équations de l'associative sont **(fg) f=f (gf)** et **(gf) g=g (fg)**, ces équations sont marchent car $f=f\,(1_{X_1})=f\,(gf)=(1_{X_2})\,f=(fg)\,f$ de même l'autre équation, donc la matrice est marche.

Alors **cat (M)** = $\{$**A** catégorie ordonnée d'ordre 2 tel que **Ob (A)**=$\{X_1, X_2\}$ avec

$A(X_1, X_1)=\{1_{X_1}\}$, $A(X_2, X_2)=\{1_{X_2}\}$, $A(X_1, X_2)=\{f\}$, $A(X_2, X_1)=\{g\}\}$.

Remarque :

Si **A, B** dans **cat (M)**, alors $A\equiv B$ l'isomorphisme est définie par la foncteur **T**.

Ob (A) =$\{X_1, X_2\}$ avec $A(X_1, X_1)=\{1_{X_1}\}$, $A(X_2, X_2)=\{1_{X_2}\}$, $A(X_1, X_2)=\{f_1\}$, $A(X_2, X_1)=\{f_2\}$, **Ob (B)** =$\{Y_1, Y_2\}$ avec $B(Y_1, Y_1)=\{1_{Y_1}\}$, $B(Y_2, Y_2)=\{1_{Y_2}\}$, $B(Y_1, Y_2)=\{g_1\}$ et $B(Y_2, Y_1)=\{g_2\}$.

La foncteur est définie par:

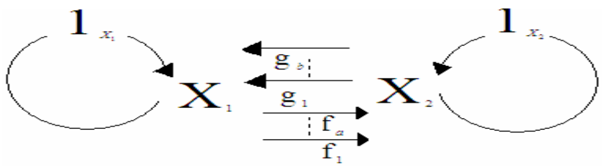
$T:A \longrightarrow B$ $\qquad T(X_i)=Y_i$, $T(f_i)=g_i$ et $T(1_{X_i})=1_{Y_i}$ $\quad \forall$ i=1,2

$T(f_i \circ f_j)=T(1_{X_j})=1_{Y_j}=g_i \circ g_i=T(f_i)\circ T(f_j)$ de même pour l'autre équation.

Evidant **T** est un foncteur isomorphisme ce qui donnée $A\equiv B$.

Corollaire:

Soit $M_{a,b}=\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$ tel que $a, b\in \mathbb{N}^*$, si a>1 ou b>1 alors **Cat** $(M_{a,b})=\phi$.En particulier si a>1 le chemin de la matrice est:



Preuve:

Soit $\mathbf{A}\in$ **Cat**$(\mathbf{M}_{a,b})$ alors **A** catégorie ordonnée d'ordre 2 , **Ob** $(\mathbf{A}) =\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2\}$,

$\mathbf{A}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_1) = \{\mathbf{1}_{X_1}\}$, $\mathbf{A}(\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_2) = \{\mathbf{1}_{X_2}\}$, $\mathbf{A}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2,\ldots., \mathbf{f}_a\}$, $\mathbf{A}(\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_1) = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2,\ldots, \mathbf{g}_b\}$,comme $a,b>1$ alors il existe au moins 4 morphismes $\mathbf{f}_1\in \mathbf{A}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$ et $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2 \in \mathbf{A}(\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_1)$,le chemin donnée $\mathbf{f}_1\mathbf{g}_1=\mathbf{1}_{X_2}$ et $\mathbf{g}_1\mathbf{f}_1=\mathbf{1}_{X_1}$ donc $\mathbf{g}_1 = \mathbf{f}_1^{-1}$,en plus $\mathbf{f}_1\mathbf{g}_2=\mathbf{1}_{X_2}$ et $\mathbf{g}_2\mathbf{f}_1=\mathbf{1}_{X_1}$ donc $\mathbf{g}_2 = \mathbf{f}_1^{-1}$,donc $\mathbf{g}_1=\mathbf{g}_2$ impossible car $\mathbf{g}_1 \neq \mathbf{g}_2$ ceci implique **A** n'existe pas alors **Cat**$(\mathbf{M}_{a,b})=\phi$.

Lemme:

Soit $\mathbf{M}=\begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix}$ $a, b, c, d\in \mathbb{N}$, si $a=b$ alors **Cat** $(\mathbf{M})\equiv$ **Cat**$({}^t\mathbf{M})$ avec ${}^t\mathbf{M}=\begin{pmatrix} a & d \\ c & b \end{pmatrix}$.

Preuve:

Cas **Cat** $(\mathbf{M})\neq \phi$.

Soit $\mathbf{A} \in$ **Cat** $(\mathbf{M})$ alors **A** ordonnée d'ordre 2 tel que **Ob** $(\mathbf{A})=\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2\}$ et $|\mathbf{A}(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j)| = \mathbf{f}_{ij} = a_{i,j}$ $\forall$ i, j$\in \{1,2\}$,soit $\mathbf{B}= \mathbf{A}^{op}$ un catégorie d'ordre 2 dont les objets sont **Ob** $(\mathbf{B})=\{\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2\}$ et $\mathbf{B}(\mathbf{Y}_i, \mathbf{Y}_j) =\mathbf{A}(\mathbf{X}_j, \mathbf{X}_i)$, on a $\mathbf{B}\in$ **Cat**$({}^t\mathbf{M})$ par ce que $|\mathbf{B}(\mathbf{Y}_i, \mathbf{Y}_j)| = |\mathbf{A}(\mathbf{X}_j, \mathbf{X}_i)| =a_{ji}$,comme $\mathbf{A}\equiv\mathbf{B}$ et $\mathbf{B}\in$ **Cat**$({}^t\mathbf{M})$ alors $\mathbf{A} \in$ **Cat**$({}^t\mathbf{M})$,donc **Cat** $(\mathbf{M})\subseteq$ **Cat**$({}^t\mathbf{M})$ de même **Cat**$({}^t\mathbf{M}) \subseteq$ **Cat** $(\mathbf{M})$ alors **Cat** $(\mathbf{M})=$ **Cat**$({}^t\mathbf{M})$.

Lemme:

Soit $\mathbf{M}=\begin{pmatrix} a & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & \cdots & \cdots & a \end{pmatrix}$ tel que $a_{i,j} \in \mathbb{N}$ pour tout i, j $\in \{1,2,\ldots, N\}$, alors

Cat $(\mathbf{M})\equiv$ **Cat** $({}^t\mathbf{M})$ isomorphisme ensembliste.

Preuve:

Si $\mathbf{A}= (\mathbf{A}, \boldsymbol{\delta})$ est une catégorie ordonnée, on noté $(\mathbf{A}^{op}, \boldsymbol{\delta})$ la catégorie opposé munie de la même bijection, en sachant que **Ob** $(\mathbf{A}^{op})=$**Ob** $(\mathbf{A})$. Aussi on a $(\mathbf{A}^{op})^{op}=\mathbf{A}$.

Soit $\mathbf{F}$ un application définie par $\mathbf{F}$: $\mathbf{Cat\ (M)} \longrightarrow \mathbf{Cat\ ({}^tM)}$ $\quad$ $\mathbf{F}$ est bijective.

$$(\mathbf{A}, \boldsymbol{\delta}) \longrightarrow (\mathbf{A}^{op}, \boldsymbol{\delta})$$

En effet $\mathbf{F}$ admet un inverse dont la formule est la même.

Exemple:

.Soit $\mathbf{M}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ alors ${}^t\mathbf{M}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\mathbf{Cat\ (M)} \equiv \mathbf{Cat\ ({}^tM)}$.

.Soit $\mathbf{M}=\begin{pmatrix} 10 & 2 & 89 \\ 104 & 10 & 98 \\ 342 & 111 & 10 \end{pmatrix}$ alors ${}^t\mathbf{M}=\begin{pmatrix} 10 & 104 & 342 \\ 2 & 10 & 111 \\ 89 & 98 & 10 \end{pmatrix}$ donc $\mathbf{Cat\ (M)} \equiv \mathbf{Cat({}^tM)}$.

Lemme:

Soit $\mathbf{M}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}$ tel que $a_{i,j} \in \mathbb{N}$ pour tout i, j $\in \{1,2,\ldots, N\}$, et soit $\sigma \in \sum_N$ (Σ_N le groupe symétrique de l'ensemble $\{1, 2 \ldots N\}$) on note $\mathbf{M}^{\sigma} = (\mathbf{b}_{ij})$ avec $\mathbf{b}_{ij} = a_{\sigma(i)\sigma(j)}$ $\forall\, i,j \in \{1,2,\ldots, N\}$, alors $\mathbf{Cat\ (M)} \equiv \mathbf{Cat\ ({}^tM)}$ isomorphisme ensembliste.

Preuve:

Si $\mathbf{A}= (\mathbf{A}, \boldsymbol{\delta})$ est une catégorie ordonnée, alors $\mathbf{A}^{\sigma} = (\mathbf{A}, \boldsymbol{\delta} \circ \sigma)$ la catégorie symétrie de $(\mathbf{A}, \boldsymbol{\delta})$ dont les objets sont $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_N\}$ avec $\mathbf{Y}_i = \mathbf{X}_{\sigma(i)}$ et $|\mathbf{A}(\mathbf{Y}_i, \mathbf{Y}_j)| = |\mathbf{A}(\mathbf{X}_{\sigma(i)}, \mathbf{X}_{\sigma(j)})|$, en remarque que $\mathbf{A}^{\sigma} \in \mathbf{Cat(M^{\sigma})}$ si $\mathbf{A} \in \mathbf{Cat\ (M)}$.

Soit $\mathbf{F}$ un application définie par $\mathbf{F}$: $\mathbf{Cat\ (M)} \longrightarrow \mathbf{Cat(M^{\sigma})}$ $\quad$ $\mathbf{F}$ est bijective.

$$(\mathbf{A}, \boldsymbol{\delta}) \longrightarrow (\mathbf{A}, \boldsymbol{\delta} \circ \sigma)$$

$$(\mathbf{A}, \boldsymbol{\delta} \circ \sigma^{-1}) \longleftarrow (\mathbf{B}, \boldsymbol{\delta})$$

Donc $\mathbf{Cat\ (M)} \equiv \mathbf{Cat(M^{\sigma})}$ isomorphisme ensembliste .

Exemple:

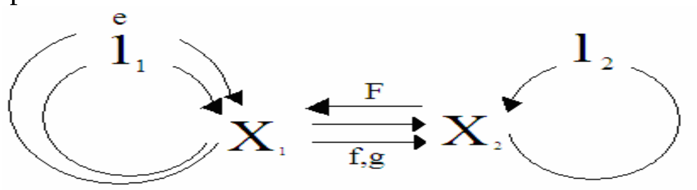
Soit $\mathbf{M}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\sigma \in \sum_3$ ($\sum_3$ le groupe symétrique de l'ensemble $\{1, 2,3\}$) tel que

σ définie par $\sigma(i)=i+1$ si $i \neq 3$ et $\sigma(3)=1$, alors $\mathbf{M}^{\sigma}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ d'après la lemme

précédant on a $\mathbf{Cat}\ (\mathbf{M}) \equiv \mathbf{Cat}(\mathbf{M}^{\sigma})$.

Soit $\mathbf{M}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en va étudier les catégories associés à $\mathbf{M}$.

Soit $\mathbf{A} \in \mathbf{Cat}\ (\mathbf{M})$ alors $\mathbf{A}$ catégorie d'ordre 2 dont les objets $\mathbf{Ob}\ (\mathbf{A})=\{X_1, X_2\}$ et $\mathbf{A}(X_1, X_1) = \{1_1\}$, $\mathbf{A}(X_2, X_2) = \{1_2\}$, $\mathbf{A}(X_1, X_2) = \{f, g\}$, $\mathbf{A}(X_2, X_1) = \{F\}$ le chemin est donnée par la graphe suivant:



Comme le catégorie d'ordre 2 le tableau de loi composition est donné par le tableau suivant:

X_1, X_2	X_1, X_2	X_1, X_2

Les formules de la loi composition sont : $\mathbf{e}^2$, $\mathbf{f} \circ \mathbf{e}$, $\mathbf{g} \circ \mathbf{e}$, $\mathbf{F} \circ \mathbf{f}$, $\mathbf{F} \circ \mathbf{g}$, $\mathbf{e} \circ \mathbf{F}$, $\mathbf{f} \circ \mathbf{F}$, $\mathbf{g} \circ \mathbf{F}$, mais $\mathbf{f} \circ \mathbf{F}=\mathbf{g} \circ \mathbf{F}=\mathbf{1}_2$ et $\mathbf{e} \circ \mathbf{F}=\mathbf{F}$.

Le tableau de la loi composition est :

$\circ$	**e**	**f**	**g**	**F**
e	$\mathbf{1}_1$, **e**	ϕ	ϕ	**F**
f	**f, g**	ϕ	ϕ	$\mathbf{1}_2$
g	**f, g**	ϕ	ϕ	$\mathbf{1}_2$
F	**F**	$\mathbf{1}_1$, **e**	$\mathbf{1}_1$, **e**	ϕ

Comme le catégorie d'ordre 2 le tableau de loi composition est donné par le tableau suivant:

X_1, X_2	X_1, X_2	X_1, X_2	X_1, X_2

Alors les équations de l'associativité sont:

1. $(e \circ e) \circ e = e \circ (e \circ e)$.
2. $f = f \circ (F \circ f)$.
3. $g = g \circ (F \circ g)$.
4. $(f \circ e) \circ F = 1_2$.
5. $(g \circ e) \circ F = 1_2$.
6. $(e \circ e) \circ F = F$.
7. $(F \circ g) \circ F = F$.
8. $(F \circ f) \circ F = F$.
9. $(g \circ e) \circ e = g \circ (e \circ e)$.
10. $(f \circ e) \circ e = f \circ (e \circ e)$.
11. $(F \circ f) \circ e = F \circ (f \circ e)$.
12. $(F \circ g) \circ e = F \circ (g \circ e)$.
13. $F \circ g = e \circ (F \circ g)$.
14. $F \circ f = e \circ (F \circ f)$.
15. $g = f \circ (F \circ g)$.
16. $f = g \circ (F \circ f)$.

En va discuter sur le 5 formules : $\mathbf{e}^2$, $\mathbf{f} \circ \mathbf{e}$, $\mathbf{g} \circ \mathbf{e}$, $\mathbf{F} \circ \mathbf{f}$, $\mathbf{F} \circ \mathbf{g}$.

On a deux cas sur $\mathbf{F} \circ \mathbf{g}$:

Pour $\mathbf{F} \circ \mathbf{g}=\mathbf{1}_1$:

On a $\mathbf{g}=\mathbf{f} \circ (\mathbf{F} \circ \mathbf{g})$ l'équation (15) alors $\mathbf{g}=\mathbf{f} \circ (\mathbf{1}_1) = \mathbf{f}$,donc $\mathbf{f}=\mathbf{g}$ impossible.

Pour $\mathbf{F} \circ \mathbf{g}=\mathbf{e}$:

On a $\mathbf{g} = \mathbf{f}\circ(\mathbf{F}\circ\mathbf{g}) = \mathbf{f}\circ\mathbf{e} \Rightarrow \mathbf{f}\circ\mathbf{g} = \mathbf{g}$ équation (15), et $\mathbf{F}\circ\mathbf{g} = \mathbf{e}(\mathbf{F}\circ\mathbf{g}) = \mathbf{e}\circ\mathbf{e} = \mathbf{e}$ ce qui donne $\mathbf{e}^2 = \mathbf{e}$ formule (13) ,en plus $\mathbf{g} = \mathbf{g}\circ(\mathbf{F}\circ\mathbf{g}) = \mathbf{g}\circ\mathbf{e}$ formule (3).

Donc $\mathbf{e}^2 = \mathbf{e}$, $\mathbf{f}\circ\mathbf{g} = \mathbf{g}$, $\mathbf{g}\circ\mathbf{e} = \mathbf{e}$ et $\mathbf{F}\circ\mathbf{g} = \mathbf{e}$,il reste $\mathbf{F}\circ\mathbf{f}$ inconnue .

Si $\mathbf{F}\circ\mathbf{f} = \mathbf{1}_1$ la matrice ne marche pas car $\mathbf{f} = \mathbf{g}\circ(\mathbf{F}\circ\mathbf{f}) = \mathbf{g}\circ\mathbf{1}_1 = \mathbf{g} \Rightarrow \mathbf{f} = \mathbf{g}$ Impossible $(\mathbf{f} \neq \mathbf{g})$.

Si $\mathbf{F}\circ\mathbf{f} = \mathbf{e}$ la matrice ne marche pas car $\mathbf{f} = \mathbf{g}\circ(\mathbf{F}\circ\mathbf{f}) = \mathbf{g}\circ\mathbf{e} = \mathbf{g} \Rightarrow \mathbf{f} = \mathbf{g}$ Impossible $(\mathbf{f} \neq \mathbf{g})$.

Finalement $\mathbf{Cat}\,(\mathbf{M}) = \phi$.

Corollaire:

Soit $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ tel que $2 \leq a \leq b$,alors $\mathbf{Cat}\,(\mathbf{M}) = \phi$.

Preuve:

Soit $\mathbf{A}$ catégorie associé à $\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ alors $\mathbf{A}$ ordonné d'ordre 2 tel que $\mathbf{Ob}\,(\mathbf{A}) = \{X_1, X_2\}$

et $\mathbf{A}(X_1, X_1) = \{\mathbf{1}_1, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{a-1}\}$, $\mathbf{A}(X_2, X_2) = \{\mathbf{1}_2\}$, $\mathbf{A}(X_1, X_2) = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_b\}$,

$\mathbf{A}(X_2, X_1) = \{\mathbf{h}\}$,on note $\mathbf{h}\circ\mathbf{f}_i = \mathbf{g}_i$ alors $\mathbf{g}_i \in \{\mathbf{1}_1, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{a-1}\}$, en plus $\mathbf{f}_i \circ \mathbf{h} = \mathbf{1}_2$.

Comme $a \leq b$ alors soit il existe i tel que $\mathbf{g}_i = \mathbf{1}_1$, soit il existe i, j tel que $\mathbf{g}_i = \mathbf{g}_j = \mathbf{h}\circ\mathbf{f}_i = \mathbf{h}\circ\mathbf{f}_j \neq \mathbf{1}_1$.

Si $\mathbf{g}_i = \mathbf{1}_1$ alors $\mathbf{h}\circ\mathbf{f}_i = \mathbf{1}_1$ et $\mathbf{f}_i \circ \mathbf{h} = \mathbf{1}_2$ ce qui donne $\mathbf{f}_i = \mathbf{h}^{-1}$.Comme $2 \leq a$ il existe j tel que $\mathbf{e}_j \neq \mathbf{1}_1$ or $\mathbf{e}_j \circ \mathbf{h} = \mathbf{h}$ et $\mathbf{h}$ inversible alors $\mathbf{e}_j = \mathbf{1}_1$ donc $\mathbf{A}$ n'existe c.à.d $\mathbf{Cat}(\mathbf{M}) = \phi$.

Si $\mathbf{g}_i = \mathbf{g}_j \neq \mathbf{1}_1$ alors $\mathbf{f}_i \circ (\mathbf{g}_i) = \mathbf{f}_i \circ (\mathbf{g}_j) \Rightarrow \mathbf{f}_i \circ (\mathbf{h}\circ\mathbf{f}_i) = \mathbf{f}_i \circ (\mathbf{h}\circ\mathbf{f}_j)$.

$\Rightarrow (\mathbf{f}_i \circ \mathbf{h})\circ\mathbf{f}_i = (\mathbf{f}_i \circ \mathbf{h})\circ\mathbf{f}_j$.

$\Rightarrow \mathbf{f}_i = \mathbf{f}_j$ car $(\mathbf{f}_i \circ \mathbf{h} = \mathbf{1}_2)$ la matrice ne marche pas.

Donc dans les deux cas $\mathbf{Cat}\,(\mathbf{M}) = \phi$.

Exemple:

Soit $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ comme a=2<b+1=3 alors $\mathbf{Cat}\,(\mathbf{M}) = \phi$, de même la matrice

En résulta que la matrice $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\forall\, a \geq 2$ ne marche pas car $2 \leq a \leq a$.

Proposition:

Soit **M**= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}$ tel que $a_{i,j} \in \mathbb{N}$ $\forall$ i, j $\in$ **{**1,2,…, N**}**, et soit **P** un sous matrice de **M** défini par **P**= $\begin{array}{c} \xleftrightarrow{\quad m-n \quad} \\ \begin{pmatrix} a_{nn} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \\ a_{(n+1)n} & a_{(n+1)(n+1)} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{mn} & \cdots & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \end{array}$ avec 0<n<m$\leq$N, **P** matrice carré de taille (m- n), alors si **P** ne marche pas alors **M** ne marche pas.

En effet : par absurde si **P** ne marche pas et si **M** est marche c.à.d il existe un catégorie **A** associé à **M**, alors **A** d'ordre N **Ob (A)=** $\{X_1, X_2 \ldots, X_N\}$ et $a_{ij} = |\mathbf{A}(X_i, X_j)|$ $\forall$ i, j $\in$ **{**1, 2….N**}**, soit **B** un sous catégorie de **A** dont les objets sont **Ob (B)=** $\{X_n, X_{n+1}, \ldots, X_m\}$, on a **B** catégorie associé à **P** car **B** ordonné d'ordre (m- n) et $|\mathbf{B}(X_i, X_j)| = |\mathbf{A}(X_i, X_j)| = a_{i,j}$ $\forall$ i, j$\in$ **{**n,(n+1),….,m**}**,alors **B** matrice associé à **P** et **P** ne marche pas impossible donc **Cat (M)** $= \phi$.

Autrement dit si un matrice carrée **M** tel que **Cat (M)**$\neq \phi$, alors tout sous matrice carré **N** de **M** est marché c.à.d **Cat (N)**$\neq \phi$.

Exemple:

1. Soit **M**= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 32 \\ 0 & 0 & 9 & 10 \end{pmatrix}$ alors **Cat (M)** $= \phi$, par ce que la matrice **N**= $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est une sous matrice de **M** en plus **N** ne marche pas exemple précédant.

2. la matrice **M**= $\begin{array}{c} \xleftrightarrow{\quad n \quad} \\ \begin{pmatrix} n & n & n & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{array}$ ne marche pas pour tout n>2, car la matrice **N**= $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est un sous matrice de **M**.

Corollaire:

Soit $\mathbf{M}=\begin{array}{c} \overset{n}{\longleftrightarrow} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & 0 & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$ tel que $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbf{Cat}\ (\mathbf{M}) \neq \phi$ pour tout n>0.

En effet:

Soit $\mathbf{A}^n = \{1,2,\dots,n\}$ alors on note $(\mathbf{A}^n, \leq)$ la catégorie dont les objets sont les éléments de $\mathbf{A}^n$ tel que, $\mathbf{X}_i = i$, et les morphismes sont définis par :

$$\forall\ i, j \in \{1,2,\dots\dots,n\} \text{ on a } \mathbf{A}^n\ (i, j) = \begin{cases} f & i \leq j \\ \phi & i > j \end{cases},$$ tel que f est un application définie par $f : \{1,2,\dots\dots,i\} \longrightarrow \{1,2,\dots\dots,j\}$ tel que :

$$x \longrightarrow f(x)=x.$$

en plus la composition ce la composition usuelle donc $(\mathbf{A}^n, \leq)$ est un catégorie ordonné d'ordre n.

On a $(\mathbf{A}^n, \leq)$ catégorie dans $\mathbf{Cat}\ (\mathbf{M})$ car elle est ordonnée d'ordre n et en plus pour tout i, $j \in \{1,2,\dots\dots,n\}$ si $i \leq j$ alors $|\mathbf{A}\ (\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j)| = 1 = a_{ij}$ et si i>j alors $a_{ij} = 0 = |\mathbf{A}\ (\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j)|$ donc $(\mathbf{A}^n, \leq) \in \mathbf{Cat}\ (\mathbf{M})$ c.à.d $\mathbf{Cat}\ (\mathbf{M}) \neq \phi$.

Références:

1. Leinster, The Euler characteristic of a category math.CT/0610260 (2006).

2. Daniel A. Steffen:
   Catégories modulaires
   Invariants d'entrelacs et de graphes ruban,
   Travail de diplôme
   présenté au Département de Mathématiques
   de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne sous la direction du
   Dr.Hess
   Bellwaldm Hiver 1997/98.

3. Arkadev Chattopadhyay and Denis Thérien
   Locally Commutative categories
   School of Computer Science, McGill University,3480 rue
   University,Montréal (PQ) H3A, Canada.

4. arXiv:math.GOUP OBJECTS AND INTERNAL CATEGORIES
   CT/0212065V1(2002).

5. A Database of Categories
   Michael Fleming
   Department of Computer Science
   University of Waterloo
   Waterloo, Ont, Canada
   Ryan Gunther
   Department of Computer Science
   University of Waterloo
   Waterloo, Ont, Canada
   Robert Rosebrugh
   Department of Mathematics and Computer Science
   Posets on up to 16 Points
6. BRENDAN D.MCKAY
   Departement of computer Science,autralian University,ACT 0200,Australia.
   (Received.26 September 2001;accepted:28 Decmber 2001).
7. http://fr.wikipedia.org/wiki/Matrice_(math%C3%A9matiques).