Sur l'existence d'une catégorie ayant une matrice strictement positive donnée

Samer Allouch
Université de Nice-Sophia Antipolis

Mai, 2008

1 Introduction

Depuis quelques dizaines d'années, certains mathématiciens se dirigent vers les domaines de la géométrie algébrique reliés spécialement aux catégories finies qui prennent ainsi une importance croissante dans les mathématiques pures et appliquées, voir [4] par exemple. Le but de mon recherche est d'étudier la classification des catégories finies au moyen de la correspondance entre les catégories finies d'ordre n et les matrices carrées de taille n. Cette correspondance figure dans les papiers récents [1] [8], voir aussi [7, p. 486]. Notre première tâche consiste à trouver quelles matrices correspondent effectivement à des catégories.

Pour chaque catégorie A qui a n objets x_1,x_2,...,x_n, la matrice M de taille n associée à A est définie par $m_{ij} := |A(x_i, x_j)|$. Dans le sens contraire on ne peut pas dire que pour chaque matrice M il y a une catégorie. Dans mon mémoire [2] et dans [1], un premier exemple d'une matrice M qui n'a pas de catégorie est

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On cherche donc à savoir quelles sont les matrices qui ont au moins une catégorie associée. On notera cette condition $Cat(M) \neq \emptyset$ et on dira parfois que M *marche*, ou dans le cas contraire que M *ne marche pas* si $Cat(M) = \emptyset$. Donc le but de ce rapport est de trouver une catégorie pour chaque type de matrice si possible, ou sinon de pouver que $Cat(M) = \emptyset$. Pour celà il suffit

de faire la démonstration pour $n = 2$ et $n = 3$ et ensuite on généralise sur n. Nous ne traitons ici que le cas où les coefficients sont strictement positifs.
Pour $n = 2$:
On a une matrice M définie par:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

avec $a, b, c, d \geq 1$.
Pour qu'on a $Cat(M) \neq \emptyset$ (il existe au moins une catégorie associée à M), on suppose que soit $a > 1$ et $d > 1$, soit $a > bc$ ou $d > bc$, soit $a = b = c = d = 1$.
Pour n=3:
Soit M une matrice définie par:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}.$$

avec $m_{ij} \geq 1$ pour tout $i, j \in \{1, 2, 3\}$.
Si $m_{ii} > 1$ pour $i = 1, 2, 3$ on trouve une catégorie A associée à M (Théorème 4.7). Si par exemple $m_{11} = 1$, soient $m_{22} > m_{12}m_{21}$, $m_{33} > m_{13}m_{31}$ et $m_{23} \geq m_{21}m_{13}$, $m_{32} \geq m_{31}m_{12}$ on va démontrer $Cat(M) \neq \emptyset$.
Pour $n > 3$ alors soit M définie par:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

avec $m_{ij} > 0$ pour tout $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$.
Premier cas :
S'il existe une seule coefficient diagonale $m_{aa} = 1$ alors $Cat(M) \neq \emptyset$ si et seulement si $m_{ii} > m_{ai}m_{ia} \forall (i \neq a)$, $m_{ij} \geq m_{ia}m_{aj} \forall (i \neq j)$.
Deuxième cas:
S'il existe plus qu'une coefficient diagonale égale à 1 alors il y a deux cas (voir la définition 4.4):
-si M est réduite alors M ne marche pas.
-si M est non réduite, on réduit M en une sous-matrice N, et dans ce cas M marche si et seulement si N marche.

Dernier cas:
Si $m_{ii} > 1, \forall i$ alors $Cat(M) \neq \emptyset$ (Théorème 4.7).
A la fin nous pouvons dire: Si M est une matrice de taille $n \geq 3$ avec $m_{ij} \geq 1$, alors $Cat(M) \neq \emptyset$ si et seulement si, pour toute sous-matrice $N \subset M$ de taille 3 on a $Cat(N) \neq \emptyset$.
Je veux exprimer mon remerciement plus profonde à mon directeur Carlos Simpson pour sa confiance en mes capacités et mon travail. Merci de consacrer vos heures précieuses pour me guider.

2 Matrices carrées d'order 2

On va étudier les matrices de taille 2:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Théorème 2.1 *Soit M une matrice carrée d'order 2 définie par:*

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix}$$

avec $a, b, c > 1$, alors $Cat(M) \neq \emptyset \Leftrightarrow |M| = (a - bc) > 0$.

Il faut démontrer les deux sens.
a) $Cat(M) \neq \emptyset \Rightarrow |M| = (a - bc) > 0$.
En effet: soit A une catégorie finie d'order 2 associée à M dont les objets sont $\{x_1, x_2\}$ et les morphismes définis par:
$A(x_1, x_1) = \{e_1 = id_{x_1}, e_2, ..., e_a\}$.
$A(x_1, x_2) = \{f_1, f_2, ..., f_b\}$.
$A(x_2, x_1) = \{g_1, g_2, ..., g_c\}$.
$A(x_2, x_2) = \{id_{x_2}\}$.

Les équations de la loi de composition sont :
1-e_ie_j pour tout $i, j \in \{1, ..., a\}$.
2-e_i^2pour tout $i \in \{1, ..., a\}$.
3-f_je_i pour tout $i \in \{1, ..., a\}$ et $j \in \{1, ..., b\}$.
4-g_if_j pour tout $i \in \{1, ..., c\}$ et$j \in \{1, ..., b\}$.
5-$f_ig_j = id_{x_2}$ pour tout $i \in \{1, ..., b\}$ et$j \in \{1, ..., c\}$.

6-e_ig_j pour tout $i \in \{1,...,a\}$ et $j \in \{1,...,c\}$.

Normalement il y a huit équations d'associativité soit:
a-e_i^3 vraie pour tout $i \in \{1,2,...,a\}$.
b-$f_j(e_i^2) = (f_je_i)e_i$ pour tout $i \in \{1,...,a\}$ et$j \in \{1,...,b\}$.
c-$(g_nf_j)e_i = g_n(f_je_i)$ pour tout $i \in \{1,...,a\}$,$j \in \{1,...,b\}$ et $n \in \{1,...,c\}$.
d-$(e_ig_n)f_j = e_i(g_nf_j)$ pour tout $i \in \{1,...,a\}$,$j \in \{1,...,b\}$ et $n \in \{1,...,c\}$.
e-$(f_ig_n)f_j = f_i(g_nf_j)$ pour tout $i,j \in \{1,...,b\}$, $n \in \{1,...,c\}$.
f-$e_i^2g_n = e_i(e_ig_n)$ pour tout $i \in \{1,...,a\}$ et $n \in \{1,...,c\}$.
g-$(f_je_i)g_n = f_j(e_ig_n)$ pour tout $i \in \{1,...,a\}$,$j \in \{1,...,b\}$ et $n \in \{1,...,c\}$.
h-$(g_nf_j)g_m = g_n(f_jg_m)$ pour tout $j \in \{1,...,b\}$ et $n,m \in \{1,...,c\}$.
Voici quelques remarques:
Rq (1):
Soit $(f,g) \in \{f_1,f_2,...,f_b\} \times \{g_1,g_2,...,g_c\}$ tel que $gf = id_{x_1}$ on a $feg = id_{x_2} \Longrightarrow g(feg) = g$ alors $(gf)(eg) = g \Longrightarrow id_{x_1}(eg) = g$ ce qui donne $eg = g$ avec $(gf = id_{x_1})$.
Aussi $(eg)f = gf = id_{x_1} = e(gf) = e$ impossible donc f,g n'existent pas tel que $gf = id_{x_1}$.
Rq(2):
$e_i^2 = e_i$ pour tout $i \in \{1,...,a\}$ à condition qu'il existe $(f,g) \in \{f_1,f_2,...,f_b\} \times \{g_1,g_2,...,g_c\}$ tel que $gf = e_i$.
En effet: $fg = id_{x_2} \Longrightarrow g(fg) = gid_{x_2} = g$ alors $(gf)g = g \Longrightarrow eg = g$
donc pour tout $eg = g$ pour tout $e \in \{e_2,...,e_a\}$ tel que $gf = e$.
On a $(eg)f = e(gf) \Longrightarrow gf = ee = e^2$.
Rq (3):
Il n'existent pas $f_1 \neq f_2$ et g tel que $gf_1 = gf_2 = e$.
En effet : $(f_1g)f_2 = id_{x_2}f_2 = f_2$
autrement dit:$(f_1g)f_2 = f_1(gf_2) = f_1(gf_1) = (f_1g)f_1 = f_1$
donc $f_1 = f_2$ contradiction.
Rq (4):
Il n'existent pas f et $g_1 \neq g_2$ tel que $g_1f = g_2f = e$
En effet : $(g_1f)g_2 = eg_2 = g_2 = g_1 = g_1(fg_2)$ alors $g_1 = g_2$ contradiction.
Rq (5):
Il n'existent pas $g_1 \neq g_2$ et $f_1 \neq f_2$ tel que $g_1f_1 = g_2f_2 = e$
En effet : $(f_1g_2)f_2 = id_{x_2}f_2 = f_2$
autrement dit:$(f_1g_2)f_2 = f_1(g_2f_2) = f_1(g_1f_1) = (f_1g_1)f_1 = f_1$
donc $f_1 = f_2$ contradiction.

Donc les 4 remarques **Rq (1) Rq (3) Rq (4)** et **Rq (5)** donnent $(a-bc) > 0$ c.à.d $a > bc$.

b) $a > bc \Rightarrow Cat(M) \neq \emptyset$.
On commence par une catégorie dont les équations de la loi de composition sont :

1-$e_j^i e_p^n = e_j^n (e^2 = e)$ pour tout $i, n \in \{1, ..., b\}$ et $j, p \in \{1, ..., c\}$.

2-$f_n e_j^i = f_i$ pour tout $i, n \in \{1, ..., b\}$ et $j \in \{1, ..., c\}$.

3-$g_j f_i = e_j^i$ pour tout $i \in \{1, ..., b\}$ et$j \in \{1, ..., c\}$.

4-$f_i g_j = id_{x_2}$ pour tout $i \in \{1, ..., b\}$ et$j \in \{1, ..., c\}$.

5-$e_j^i g_k = g_j$ pour tout $i \in \{1, ..., a\}$ et $j \in \{1, ..., c\}$.

On va verifie les équations associatives.
$(e_i^j e_p^n) e_r^s = e_i^n e_r^s = e_i^s = e_i^j (e_p^n e_r^s) = e_i^j e_p^s = e_i^s$ vraie.

$(f_j e_r^s) e_p^n = f_s e_p^n = f_n = f_j (e_r^s e_p^n) = f_j e_r^n = f_n$ vraie .

$(g_j f_i) e_p^n = e_j^i e_p^n = e_j^n = g_j (f_i e_p^n) = g_j f_n = e_j^n$ vraie.

$(e_p^n g_j) f_i = g_p f_i = e_p^i = e_p^n (g_j f_i) e_p^n e_j^i = e_p^i$ vraie .

$(f_j g_n) f_p = f_p = f_j (g_n f_p) = f_j e_n^p = f_p$ vraie .

$(e_p^n e_r^s) g_j = e_p^s g_j = g_p = e_p^n (e_r^s g_j) = e_p^n g_r = g_p$ vraie .

$(f_i e_p^n) g_j = f_n g_j = id_{x_2} = f_i (e_p^n g_j) = f_i g_p = id_{x_2}$ vraie .

$(g_j f_i) g_n = e_j^i g_n = g_j = g_j (f_i g_n) = g_j$ vraie .

Toutes les équations associatives marchent donc B est une catégorie finie d'order 2 , d'apres la construction des morphismes de B alors B est associée à M définie par :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} bc+1 & b \\ c & 1 \end{pmatrix},$$

finalement $Cat(M) \neq \emptyset$.
On note $M(u)$ par:

$$\mathbf{M(u)} = \begin{pmatrix} u & b \\ c & 1 \end{pmatrix}$$

avec pour commencer $u = bc + 1$.
En fait A est une catégorie de $M(u)$, soit A' une nouvelle catégorie dont les objets $Ob(A) = Ob(A')$ et les morphismes définis par :
$A'(x_1, x_1) = \{id_{x_1}, e_1^1, ..., e_j^i, ..., e_c^b, e_1, ..., e_n\}$
$A'(x_1, x_2) = \{f_1, f_2, ..., f_b\}$
$A'(x_2, x_1) = \{g_1, g_2, ..., g_c\}$
$A'(x_2, x_2) = \{id_{x_2}\}$
avec la loi de composition définie par:
$e_i g_j = e_1^1 g_j = g_1$ pour tout $i \in \{1, 2.., n\}$.

$f_i e_j = f_i e_c^b = f_b$ pour tout $i \in \{1, 2.., n\}$.

$e_i e_j = e_1^1 e_c^b = e_1^b$ pour tout $i, j \in \{1, 2.., n\}$.
Toutes les équations associatives marchent alors A' est une catégorie associé à $M(u + n)$.

Corollaire 2.2 *Soit M une matrice carré d'order 2 définie par:*

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

alors on a $Cat(M) \neq \emptyset$ dans les cas suivants :
1- a=b=c=d=1 voir [2];
2- a=1, $d > bc$;
3- d=1, $a > bc$;
4- $a > 1$, $d > 1$ voir [8].
Sinon $Cat(M) = \emptyset$.

Preuve: on pose $a > bc$.
Soit N une matrice définie par:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix}$$

D'après ce qui précède il existe A une catégorie associée à N , avec $Ob(A) = \{x_1, x_2\}$ et les morphismes définis par:
$A(x_1, x_1) = \{id_{x_1}, e_1^1, ..., e_j^i, ..., e_c^b, e_{bc+2}..., e_a\}$.
$A(x_1, x_2) = \{f_1, f_2, ..., f_b\}$.
$A(x_2, x_1) = \{g_1, g_2, ..., g_c\}$.
$A(x_2, x_2) = \{id_{x_2}\}$.
Soit A' une nouvelle catégorie tel que $Ob(A') = Ob(A)$ et les morphismes définis par:
$A'(x_1, x_1) = \{id_{x_1}, e_1^1, ..., e_j^i, ..., e_c^b, e_{bc+2}..., e_a\}$.
$A'(x_1, x_2) = \{f_1, f_2, ..., f_b\}$.
$A'(x_2, x_1) = \{g_1, g_2, ..., g_c\}$.
$A'(x_2, x_2) = \{id_{x_2}, n_1, ..., n_{d-1}\}$.
avec $n_i \neq n_j$ pour tout i, j .
Les équations de la loi de composition qui dépendent des $\{n_1, .., n_{d-1}\}$ sont
$nn' = n_1$
$nf = f$
$gn = g$.
Toutes les équations associatives marchent donc A' est une catégorie associée à M, donc $Cat(M) \neq \emptyset$.

3 Matrices triples

On va étudier les matrices de taille 3:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ c & n & m \\ p & q & r \end{pmatrix}$$

Supposons $n > 1$ et $r > 1$, sinon voir le cas des lemmes (4.5, 4.6). On peut déduire de l'étude précèdant que $n \geq ac+1$ et $r \geq bp+1$. Les deux matrices suivantes sont sous-matrices de M:

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ p & r \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ c & n \end{pmatrix},$$

voir [2] (ici une *sous-matrice* correspond par convention au même sous-ensemble des colonnes que des lignes). Un lemme facile dit que si N est une sous matrice qui ne marche pas alors M ne marche pas non plus !
En plus $m \geq bc$ et $q \geq ap$ en effet:
soit A une catégorie associée à M dont les objets sont $\{x_1, x_2, x_3\}$ et les morphismes sont donnés par:
$A(x_1, x_1) = \{1\}$.
$A(x_1, x_2) = \{f_1, ..., f_a\}$.
$A(x_1, x_3) = \{h_1, ..., h_b\}$.
$A(x_2, x_1) = \{g_1, ..., g_c\}$.
$A(x_2, x_2) = \{e_0 = 1, ..., e_n\}$.
$A(x_2, x_3) = \{k_1, ..., k_m\}$.
$A(x_3, x_1) = \{L_1, ..., L_p\}$.
$A(x_3, x_2) = \{M_1, ..., M_q\}$.
$A(x_3, x_3) = \{N_1, ..., N_r\}$.

les équations de la loi de composition sont:

$NN' \in \{N\}$	$MN \in \{M\}$
$LN \in \{L\}$	$gM \in \{L\}$
$kM \in \{N\}$	$eM \in \{M\}$
$hL \in \{N\}$	$fL \in \{M\}$
$Nk \in \{k\}$	$Mk \in \{e\}$
$Lk \in \{g\}$	$ge \in \{g\}$
$ke \in \{k\}$	$ee' \in \{e\}$
$hg \in \{k\}$	$fg \in \{e\}$
$Nh \in \{h\}$	$Mh \in \{f\}$
$Lh = 1$	$kf \in \{h\}$
$gf = 1$	$ef \in \{f\}$

les équations d'associativité sont données par 8 lignes:

$fgf \in \{f\}$	$fLh \in \{f\}$	$gfg \in \{g\}$	$fge \in \{e\}$	$fLN \in \{M\}$
$hgf \in \{h\}$	$hLh \in \{h\}$	$efg \in \{e\}$	$hge \in \{k\}$	$hLN \in \{N\}$
$gef = 1$	$gMh = 1$	$kfg \in \{k\}$	$gee' \in \{g\}$	$gMN \in \{L\}$
$ee'f \in \{f\}$	$eMh \in \{f\}$	$Lhg \in \{g\}$	$ee'e" \in \{e\}$	$eMN \in \{M\}$
$kef \in \{h\}$	$kMh \in \{h\}$	$Mhg \in \{e\}$	$kee' \in \{k\}$	$kMN \in \{N\}$
$Lkf = 1$	$LNh = 1$	$Nhg \in \{k\}$	$Lke \in \{g\}$	$LNN' \in \{L\}$
$Mkf \in \{f\}$	$MNh \in \{f\}$	$Mke \in \{e\}$	$MNN' \in \{M\}$	$MNk \in \{e\}$
$Nkf \in \{h\}$	$NN'h \in \{h\}$	$Nke \in \{k\}$	$NN'N" \in \{N\}$	$NN'k \in \{k\}$
$MhL \in \{M\}$	$kfL \in \{N\}$	$NhL \in \{N\}$	$fgM \in \{M\}$	$geM \in \{L\}$
$keM \in \{N\}$	$LkM \in \{L\}$	$NkM' \in \{M\}$	$NkM \in \{N\}$	$eMk \in \{e\}$
$fkL \in \{e\}$	$hLk \in \{k\}$	$gMk \in \{g\}$	$LhL' \in \{L\}$	$kMk' \in \{k\}$
$gfL \in \{L\}$	$efL \in \{M\}$	$LNk \in \{g\}$	$ee'M \in \{M\}$	$hgM \in \{N\}$

Nous revenons au but: il faut démontrer que $m \geq bc$ et $q \geq ap$.
On suppose que $m < bc$ alors il y a 3 cas:
–il existe $h \neq h'$,$g \neq g'$ tels que $hg = h'g'$ alors $L(hg) = L(h'g')$ donc $(Lh)g = (Lh')g'$ alors $g = g'$ car $(Lh = 1)$ et L arbitraire;
–il existe h ,$g \neq g'$ tels que $hg = hg'$ alors $L(hg) = L(hg')$ donc $(Lh)g = (Lh)g'$ alors $g = g'$ car $(Lh = 1)$;
–il existe $h \neq h'$, g tels que $hg = h'g$ alors $(hg)f = (h'g')f$ donc $h(gf) = h'(g'f)$ alors $h = h'$ car $(gf = 1)$et f arbitraire.
De même pour $q \geq ap$.
On pose $q < ap$ alors il existe 3 cas:
–il existe $f \neq f'$,$L \neq L'$ tels que $fL = f'L'$ alors $g(fL) = g(f'L')$ donc $(gf)L = (gf')L'$ alors $L = L'$ car $(gf = 1)$et g arbitraire;
–il existe f,$L \neq L'$ tels que $fL = fL'$ alors $g(fL) = g(fL')$ donc $(gf)L = (gf)L'$ alors $L = L'$ car $(gf = 1)$ et g arbitraire;
–il existe $f \neq f'$,L tels que $fL = f'L'$ alors $(fL)h = (f'L')h$ donc $f(Lh) = f'(Lh)$ alors $f = f'$ car $(Lh = 1)$ et h arbitraire.

Finalement :

Théorème 3.1 *Si M est une matrice strictement positive de taille 3 telle que $m_{11} = 1$ et $m_{22}, m_{33} > 1$, une condition nécessaire pour qu'elle marche est que $n \geq ac + 1$, $r \geq bp + 1$ et $m \geq bc$, $q \geq ap$.*

Rq: $ge = g$ et $e^2 = e$ pour tout $e \in A(x_2, x_2)$ et $g \in A(x_2, x_1), f \in A(x_1, x_2)$ tel que$fg = e$ en effet:

$fg = e$ alors $g(fg) = ge$ donc $(gf)g = g = ge$ aussi $fg = e$ alors $f(ge) = e$ donc $(fg)e = e$ alors $e^2 = e$.

Théorème 3.2 *Soit M une matrice triple définie par:*

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ c & n & m \\ p & q & r \end{pmatrix}$$

avec a,b,c,n,m,p,q,r> 1.
alors $Cat(M) \neq \emptyset \Leftarrow n = ac + 1, r = bp + 1, m = bc, q = ap$.

Preuve: soit A une semi-catégorie dont les objets $\{x_1, x_2, x_3\}$ et les morphismes définis par:
$A(x_1, x_1) = \{1\}$,
$A(x_1, x_2) = \{f_1, ..., f_a\}$,
$A(x_1, x_3) = \{h_1, ..., h_b\}$,
$A(x_2, x_1) = \{g_1, ..., g_c\}$,
$A(x_2, x_3) = \{k_1^1, ..., k_c^b\}$,
$A(x_3, x_1) = \{L_1, ..., L_p\}$,
$A(x_3, x_2) = \{M_1, ..., M_p^a\}$,
$A(x_2, x_2) = \{e_1^1, ..., e_c^a\}$ avec $e_i^j \neq 1$ pour tout i,
$A(x_3, x_3) = \{N_1^1, ..., N_p^a\}$ avec $N_i^j \neq 1$ pour tout i.

Les équations de la loi de composition sont définies par:

$N_j^i N_{j'}^{i'} = N_{j'}^i$	$M_j^i N_{j'}^{i'} = M_{j'}^i$
$L_{j'} N_j^i = L_j$	$g_{j'} M_j^i = L_j$
$k_j^i M_{j'}^{i'} = N_{j'}^i$	$e_j^i M_{j'}^{i'} = M_{j'}^i$
$h_i L_j = N_j^i$	$f_i L_j = M_j^i$
$N_j^i k_{j'}^{i'} = k_{j'}^i$	$M_j^i k_{j'}^{i'} = e_{j'}^i$
$L_{i'} k_j^i = g_j$	$g_{j'} e_j^i = g_j$
$k_{j'}^{i'} e_j^i = k_j^{i'}$	$e_j^i e_{j'}^{i'} = e_{j'}^i$
$h_i g_j = k_j^i$	$f_i g_j = e_j^i$
$N_j^i h_{j'} = h_i$	$M_j^i h_{j'} = f_i$
$L_i h_j = 1$	$K_j^i f_{j'} = h_i$
$g_i f_j = 1$	$e_j^i f_{j'} = f_i$

Toutes les équations associatives marchent. Donc A est une semi-catégorie. Soit $B = A \oplus \{id_{x_2}\} \oplus \{id_{x_3}\}$ donc B est une catégorie associée à M ce qui donne $Cat(M) \neq \emptyset$.

Notation:
On a pour la matrice triple M définie par:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ c & n & m \\ p & q & r \end{pmatrix}$$

avec $n = ac$,$r = bp$, $m = bc$ et $q = ap$ d'apres ce qui précède M admet A comme semi-catégorie.

Maintenant on va chercher une semi-catégorie associée à M avec $n > ac, r > bp, m > bc, q > ap$ et après on ajoutera les identités.
Soit $M(ac+1)$ matrice définie par :

$$\mathbf{M(ac+1)} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ c & ac+1 & m \\ p & q & r \end{pmatrix}$$

avec $r = bp, m = bc, q = ap$.
Soit A' une semi-cat'egorie dont les objets sont $Ob(A') = Ob(A)$ avec les morphismes:
$A'(x_1, x_1) = \{1\}$;
$A'(x_1, x_2) = \{f_1, ..., f_a\}$;
$A'(x_1, x_3) = \{h_1, ..., h_b\}$;
$A'(x_2, x_1) = \{g_1, ..., g_c\}$;
$A'(x_2, x_3) = \{k_1^1, ..., k_c^b\}$;
$A'(x_3, x_1) = \{L_1, ..., L_p\}$;
$A'(x_3, x_2) = \{M_1, ..., M_p^a\}$;
$A'(x_2, x_2) = \{e_1^1, ..., e_c^a\} \cup \{e'\}$ avec $e' \notin A(x_2, x_2)$;
$A'(x_3, x_3) = \{N_1^1, ..., N_p^a\}$.
Les équations de la loi de composition de A' sont les mêmes que pour A, en plus les équations dependant de e' sont:
$e' f_i = e_1^1 f_i$;

$e'M^i_j = e^1_1 M^i_j$;
$e'e^i_j = e^1_1 e^i_j$;
$e^i_j e' = e^i_j e^a_c$;
$k^i_j e' = k^i_j e^a_c$;
$g_i e' = g_i e^a_c$.
Les équations associatives marchent mais dans le cas où il y a e' les équations sont:

$g_n e' M^i_j$	$e'M^i_j k^l_n$	$e' f_n L_i$	$e^i_j e' M^l_n$
$ee'e"$	$k^i_j ee'$	$L_n k^i_j e'$	$e'M^i_j N^l_n$
$N^i_j k^l_n e'$	$f_i g_j e'$	$h_i g_j e'$	$g_l e^i_j e'$
$k^i_j e' M^l_n$	$e'M^i_j h_n$	$e' f_i g_j$	$M^i_j k^l_n e'$
$g_j e' f_i$	$e^i_j e' f_{i'}$	$k^i_j e' f_{i'}$	$k^i_j e' f_{i'}$

on va vérifier ces équations.
$g_j(e'f_i) = g_j(e^1_1 f_i) = g_j f_1 = 1 = (g_j e')f_i = (g_j e^a_c)f_i = gf = 1$ vraie.
$(e^i_j e')f_{i'} = (e^i_j e^1_1)f_{i'} = e^i_1 f_{i'} = f_i = e^i_j(e'f_{i'}) = e^i_j f_1 = f_i$ vraie de meme $e'ef$.
$(k^i_j e')f_{i'} = (k^i_c)f_{i'} = h_i = k^i_j(e'f_{i'}) = k^i_j f_1 = h_i$ varie .
$(k^i_j e')M^l_n = k^i_c M^l_n = N^i_1 = k^i_j(e'M^l_n) = k^i_j M^1_n = N^i_1$ varie.
$(e'M^i_j)h_n = M^1_j h_n = f_1 = e'(M^i_j h_n) = e'f_i = f_1$ vraie.
$(e'f_i)g_j = f_1 g_j = e^1_j = e'(f_i g_j) = e'e^i_j = e^1_j$ vraie;
$(M^i_j k^l_n)e' = e^i_n e' = e^i_c = M^i_j(k^l_n e') = M^i_j K^1_c = e^i_c$ vraie.
$(N^i_j k^l_n)e' = k^i_n e' = k^i_c = N^i_j(k^l_n e') = N^i_j k^l_c = k^i_c$ vraie.
$(f_i g_j)e' = e^i_j e' = e^i_c = f_i(g_j e') = f_i g_c = e^i_c$ vraie.
$(h_i g_j)e' = k^i_j e' = k^i_c = h_i(g_j e') = h_i g_c = k^i_c$ vraie.
$(g_l e^i_j)e' = g_j e' = g_c = g_l(e^i_j e') = g_l e^i_c = g_c$ vraie de meme $ge'e$.
$(e^i_j e')e^l_n = e^i_c e^l_n = e^i_n = e^i_j(e'e^l_n) = e^i_j e^1_n = e^i_n$ vraie de meme $e'ee"$ et $ee"e'$.
$(k^l_n e^i_j)e' = k^l_j e' = k^l_c = k^l_n(e^i_j e') = k^l_n e^i_c = k^l_c$ vraie de meme $ke'e$.
$(L_n k^i_j)e' = g_j e' = g_c = L_n(k^i_j e') = L_n k^i_c = g_c$ vraie .
$(e'M^i_j)N^l_n = M^1_j N^l_n = M^1_n = e'(M^i_j N^l_n) = e'M^i_n = M^1_n$ vraie.
$(g_n e')M^i_j = g_c M^i_j = Lj = g_n(e'M^i_j) = g_n M^1_j = L_j$ vraie .
$(e'M^i_j)k^l_n = M^1_j k^l_n = e^1_n = e'(M^i_j k^l_n) = e'e^i_n = e^1_n$ vraie.
$(e'f_n)L_i = f_1 L_i = M^1_i = e'(f_n L_i) = e'M^n_i = M^1_i$ vraie.
$(e^i_j e')M^l_n = e^i_c M^l_n = M^i_n = e^i_j(e'M^l_n) = M^i_n$ vraie de meme $e'eM$.
Donc A_1 est une semi-catégorie, on note $e' = e_1$
on suppose que A_{n-1} est une semi-catégorie telle que $A_{n-1} = A' \cup \{e_2, ..., e_{n-1}\} = A \cup \{e_1, ..., e_{n-1}\}$ avec $e_i \neq e_j$ pour tout $i, j \in \{1, ..., (n-1)\}$
avec la loi de composition définie par:

$e_i(...) = e_1^1(...)$,
$(...)e_i = (...)e_c^a$,
$e_ie_j = e_c^1 = e_je_i$,
$e_i{}^2 = e_i$.
Pour vérifier que A_{n-1} est une semi-catégorie on considère les équations de la loi d'associativité suivantes.
$(e_ie_j)f_v = e_c^1f_v = f_1 = e_i(e_jf_v) = e_if_1 = f_1$ vraie.
$g_v(e_ie_j) = g_ve_c^1 = g_c = (g_ve_i)e_j = g_ce_j = g_c$ vraie .
$(e_ie_j)M_s^t = e_c^1M_s^t = M_s^1 = e_i(e_jM_s^t) = e_iM_s^1 = M_s^1$ vraie.
$(k_s^te_i)e_j = k_c^te_j = k_c^t = k_s^t(e_ie_j) = k_s^te_c^1 = k_c^t$ vraie.
$(e_ie_j)e_k = e_c^1e_k = e_c^1e_c^a = e_c^1 = e_i(e_je_k) = e_i(e_c^1) = e_1^1e_c^1 = e_c^1$ varie.
$(e_j^ie_k)e_l = (e_j^ie_c^a)e_l = e_c^ie_c^a = e_c^i = e_j^ie_c^1 = e_c^i$ vraie .
$(e_ke_j^i)e_l = (e_1^1e_j^i)e_l = e_j^1e_c^a = e_c^1 = e_1^1(e_j^ie_c^a) = e_c^1$ vraie.
Les autres équations ressemblent aux équations dans le cas de e_1.
Donc A_{n-1} est une semi-catégorie associeé à la matrice suivant:

$$\mathbf{M(ac+(n-1))} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ c & ac+(n-1) & bc \\ p & ap & bp \end{pmatrix}$$

Maintenant on ajoute des morphismes sur $A(x_2, x_3)$.
Soient $k_1, ..., k_m$ morphismes dans $A(x_2, x_3)$ avec $k_i \neq k_j$ pour tout $i, j \in \{1, ..., m\}$ tel que le loi de composition est définie par:
$k_i(...) = k_1^1$
$(...)k_i = (...)k_c^b$
$k_je_i = k_1^1e_c^a = k_c^1$.
Les équations associatives associées à k_i sont:
$(k_ve_j^i)f_l = (k_1^1e_j^i)f_l = k_j^1f_l = h_1 = k_v(e_j^if_l) = k_vf_i = k_1^1f_i = h_1$ vraie.
$(k_ve_i)f_l = (k_1^1e_c^a)f_l = k_c^1f_l = h_1 = k_v(e_if_l) = k_vf_1 = k_1^1f_1 = h_1$ vraie.
$(k_vM_j^i)h_l = (k_1^1M_j^i)h_l = N_j^1h_l = h_1 = k_v(M_j^ih_l) = k_vf_i = k_1^1f_i = h_1$ vraie.
$(k_vM_j^i)N_l^n = (k_1^1M_j^i)N_l^n = N_j^1N_l^n = N_l^1 = k_v(M_j^iN_l^n) = k_vM_l^i = N_l^1$ vraie.
$(k_ne_j^i)M_v^o = (k_1^1e_j^i)M_v^o = k_j^1M_v^o = N_v^1 = k_n(e_j^iM_v^o) = k_nM_v^i = N_v^1$ vraie.
$(k_ne_j)M_v^o = (k_1^1e_c^a)M_v^o = k_c^1M_v^o = N_v^1 = k_n(e_jM_v^o) = k_nM_v^1 = N_v^1$ vraie.
$(k_vM_j^i)k_d^o = (k_1^1M_j^i)k_d^o = N_j^1k_d^o = k_d^1 = k_v(M_j^ik_d^o) = k_ve_d^i = k_d^1$ vraie.
$(k_vM_j^i)k_d = (k_1^1M_j^i)k_d = N_j^1k_c^b = k_c^1 = k_v(M_j^ik_d) = k_ve_c^i = k_c^1$ vraie.
$(k_d^oM_j^i)k_v = (N_j^o)k_v = N_j^ok_c^b = k_c^o = k_d^o(M_j^ik_v) = k_d^oe_c^i = k_c^o$ vraie.
$(k_vf_i)L_j = (k_1^1f_i)L_j = h_1L_j = N_j^1 = k_v(f_iL_j) = k_1^1M_j^i = N_j^1$ vraie.
$(k_vf_i)g_j = (k_1^1f_i)g_j = h_1g_j = k_j^1 = k_v(f_ig_j) = k_1^1e_j^i = k_j^1$ vraie.
$(L_jk_v)f_i = (L_jk_c^b)f_i = g_cf_i = 1 = L_j(k_vf_i) = 1$ vraie.

$(L_jk_i)M_v^o = (L_jk_c^b)M_v^o = g_cM_v^o = L_v = L_j(k_iM_v^o) = L_jN_v^1 = L_v$ vraie.
$(M_j^ik_o)f_v = (M_j^ik_c^b)f_v = e_c^if_v = f_i = M_j^i(k_if_v) = M_j^ih_1 = f_i$ vraie.
$(L_jk_i)e_v^o = (L_jk_c^b)e_v^o = g_ce_v^o = g_v = L_j(k_ie_v^o) = L_jk_v^1 = g_v$ vraie.
$(N_j^ik_o)f_v = (N_j^ik_c^b)f_v = k_c^if_v = h_i = N_j^i(k_if_v) = N_j^ih_1 = h_i$ vraie.
$(M_j^ik_o)e_v^n = (M_j^ik_c^b)e_v^n = e_c^ie_v^n = e_v^i = M_j^i(k_ie_v^n) = M_j^ik_v^1 = e_v^i$ vraie.
$(M_j^ik_o)e_v = (M_j^ik_c^b)e_v = e_c^ie_v = e_c^i = M_j^i(k_oe_v) = M_j^ik_c^1 = e_c^i$ vraie.
$(M_j^ik_o)M_v^n = (M_j^ik_c^b)M_v^n = e_c^iM_v^n = M_v^i = M_j^i(k_iM_v^n) = M_j^iN_v^1 = M_v^i$ vraie.
$(N_j^ik_o)e_v^n = (N_j^ik_c^b)e_v^n = k_c^ie_v^n = k_v^i = N_j^i(k_ie_v^n) = N_j^ik_v^1 = k_v^i$ vraie.
$(N_j^ik_o)e_v = (N_j^ik_c^b)e_v = k_c^ie_c^a = k_c^i = N_j^i(k_ie_v^n) = N_j^ik_c^1 = k_c^i$ vraie.
$(N_j^ik_o)M_v^n = (N_j^ik_c^b)M_v^n = k_c^iM_v^n = N_v^i = N_j^i(k_oM_v^n) = N_j^iN_v^1 = N_v^i$ vraie.
$(f_iL_j)k_o = M_j^ik_o = e_c^i = f_i(L_jk_o) = f_ig_c = e_c^i$ vraie.
$(h_iL_j)k_o = N_j^ik_o = k_c^i = h_i(L_jk_o) = h_ig_c = k_c^i$ vraie.
$(g_vM_j^i)k_o = L_jk_o = g_c = g_v(M_j^ik_o) = g_ve_c^i = g_c$ vraie.
$(e_v^nM_j^i)k_o = M_j^nk_o = e_c^n = e_v^n(M_j^ik_o) = e_v^ne_c^i = e_c^n$ vraie.
$(e_vM_j^i)k_o = M_j^1k_o = e_c^1 = e_v(M_j^ik_o) = e_ve_c^i = e_c^1$ vraie.
$(L_vN_j^i)k_o = L_jk_o = g_c = L_v(N_j^ik_o) = L_vk_c^i = g_c$ vraie .
$(M_v^nN_j^i)k_o = M_j^nk_o = e_c^n = M_v^n(N_j^ik_o) = M_v^nk_c^i = e_c^n$ vraie .
$(N_v^nN_j^i)k_o = N_j^nk_o = k_c^n = N_v^n(N_j^ik_o) = N_v^nk_c^i = k_c^n$ vraie .

Par la meme construction on peux ajouter aussi sur $A(x_3, x_3)$ et sur $A(x_3, x_2)$ des morphismes adjoints avec la définition de la loi de composition:
$N_i(...) = N_1^1(...)$.
$(...)N_i = (...)N_p^b$.
$N_iN_j = N_p^1 = N_jN_i$.
$N_iK_j = K_c^1$ et $M_iN_j = M_p^1$.
${N_i}^2 = N_i$ pour tout $i \in \{1, ..., r-1\}$.
$M_i(...) = M_1^1(...)$.
$(...)M_i = (...)M_P^a$.
$M_ik_j = e_c^1$,$e_iM_j = M_p^1$ et $k_iM_j = N_p^1$.
pour tout $i \in \{1, ..., q\}$.
Les équations associatives marchent, donc $A_{(n-1,m,q,r-1)}$ est une semi-catégorie c.à .d en ajoutant les identites $A'_{(n,m,q,r)}$ est une catégorie associée à la matrice M qui est définie par:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ c & ac+n & bc+m \\ p & ap+q & bp+r \end{pmatrix}$$

où n, r, m, q sont des entiers naturels.

Corollaire 3.3 *Soit M une matrice d'order 3 tel que :*

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} z & a & b \\ c & n & m \\ p & q & r \end{pmatrix}$$

avec $z \geq 1$,$n > ac$,$r > bp$, $m \geq bc$ et $q \geq ap$ alors $Cat(M) \neq \emptyset$

Preuve: soit N une matrice définie par:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ c & n & m \\ p & q & r \end{pmatrix}.$$

D'aprés le théorème précédant $Cat(N) \neq \emptyset$ alors il existe une catégorie A définie comme précédemment, soit A' une catégorie dont les objets $Ob(A') = Ob(A)$ et les morphismes $Mor(A') = Mor(A) \cup \{n_1, n_2, ..., n_{z-1}\}$ avec $A'(x_1, x_1) = \{1, n_1, n_2, ..., n_{z-1}\}$ et les équations de la loi de composition associées à n_i définies par:
$n_i(...) = (...)$
$(...)n_i = (...)$
$n_i^2 = n_i$
$n_i n_j = n_1$ avec $i \neq j$.
Alors A' une catégorie associée à M donc $Cat(M) \neq \emptyset$.

4 Matrices Générales

Théorème 4.1 *Soit M une matrice de taille n telle que M définie par:*

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & \dots & M_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \dots & M_{nn} \end{pmatrix}$$

avec $M_{ij} > 0\ \forall i, j \in \{1, ..., n\}$ *et* $M_{ii} > 1$ *pour* $\in \{2, ..., n\}$,
alors $Cat(M) \neq \emptyset$ *si et seulement si* $M_{ii} > M_{1i}M_{i1} \forall i \in \{2, ..., n\}$ *et* $M_{ij} \geq M_{i1}M_{1j}$ *avec* $i, j \in \{2, ..., n\}$.

En effet:
on supose que M marche alors il existe A catégorie associée à M dont les objets sont $\{x_1, ..., x_n\}$ et $|A(x_i, x_j)| = M_{ij}$.
On va démontrer que $M_{ii} > M_{1i}M_{i1}$ on suppose que $M_{ii} \leq M_{1i}M_{i1}$, soit $A(x_1, x_i) = \{f_1, ..., f_a\}$ et $A(x_i, x_1) = \{g_1, ..., g_b\}$ et $A(x_i, x_i) = \{1, e_2, ..., e_c\}$ avec $a = M_{1i}$, $b = M_{i1}$ et $c = M_{ii}$ on a $gf = 1$ pour tout f,g et $fg = e$ on a $M_{ii} \leq M_{1i}M_{i1}$ alors soit il existe g, g', f, e tel que $fg = fg' = e$ alors $g(fg) = g(fg') = ge$ donc $(gf)g = (gf)g'$ alors $g = g'$ impossible car $g \neq g'$; soit de même pour si on a f, f' tel que $fg = f'g = e$ impossible, soit si on a f, f', g, g' avec $fg = f'g' = e$ impossible aussi, ce qui donne $M_{ii} \geq M_{1i}M_{i1}$.
Si $\exists f, g$ tel que $fg = 1$ alors $g'(fg) = g'$ alors $(g'f)g = g'$ donc $g = g'$ impossible.
Finalement $M_{ii} > M_{1i}M_{i1}$.
Pour $M_{ij} \geq M_{i1}M_{1j}$,
soit $A(x_i, x_1) = \{g_1, ..., g_b\}$,$A(x_1, x_j) = \{h_1, ..., h_m\}$ et $A(x_i, x_j) = \{L_1, ..., L_v\}$ avec $b = M_{i1}, m = M_{1j}$ et $v = M_{ij}$, on suppose que $M_{ij} < M_{i1}M_{1j}$, alors ils $\exists L, h, h', g$ou L, h, h', g, g' ou L, h, g, g' les trois sont les mêmes type de démonstration; je veux prendre le cas où $\exists L, h, h', g, g'$ tel que $L = hg = h'g'$ alors $Lf = (hg)f = (h'g')f$ donc $Lf = h(gf) = h'(g'f)$ alors $Lf = h = h'$ impossible car $h \neq h'$, ce qui donne $M_{ij} \geq M_{i1}M_{1j}$ pour tout $i, j \in \{2, ..., n\}$.

Maintenant on va démontrer le sens inverse: si $M_{ii} = M_{1i}M_{i1} \forall i \in \{2, ..., n\}$ et $M_{ij} = M_{i1}M_{1j}$ avec $i, j \in \{2, ..., n\}$ alors M marche .
En effet:
Soit A' une semi-catégorie dont les objets sont $\{x_1, ..., x_n\}$ et $|A'(x_i, x_j)| = M_{ij}$ avec les notations suivantes:

$A'(x_1, x_1) = 1$.

$A'(x_1, x_i) = \{{}_if_1, ..., {}_if_{M_{1i}}\}$ pour tout $i \in \{2, ..., n\}$.

$A'(x_i, x_1) = \{{}_ig_1, ..., {}_ig_{M_{i1}}\}$ pour tout $i \in \{2, ..., n\}$.

$A'(x_i, x_i) = \{{}_ie_1^1, ..., {}_ie_{M_{i1}}^{M_{1i}}\}$ pour tout $i \in \{2, ..., n\}$.

$A'(x_i, x_j) = \{{}_j^iH_1^1, ..., {}_j^iH_{M_{i1}}^{M_{1j}}\}$ pour tout $i, j \in \{2, ..., n\}$ avec $i \neq j$.
Les équations de la loi de composition sont définies par:

${}_i^jH_b^a \circ {}_j^iH_d^c = {}_ie_d^a$	${}_je_b^a \circ {}_j^iH_d^c = {}_j^iH_d^a$	${}_if_a \circ {}_jg_b = {}_i^jH_b^a$
${}_ig_c \circ {}_ie_b^a = {}_ig_b$	${}_ie_b^a \circ {}_ie_d^c = {}_ie_d^a$	${}_ie_b^a \circ {}_ie_b^a = {}_ie_b^a$
$g \circ f = 1$	${}_ie_b^a \circ {}_if_c = {}_if_a$	${}_j^iH_b^a \circ {}_jf_c = {}_if_a$
${}_ig_a \circ {}_i^jH_c^b = {}_jg_c$	${}_i^jH_b^a \circ {}_je_d^c = {}_i^jH_d^a$	${}_i^jH_b^a \circ {}_{j'}^{i'}H_d^c = {}_i^{i'}H_d^a$
${}_ig_a \circ {}_j^iH_c^b = {}_ig_c$	${}_if_a \circ {}_ig_b = {}_ie_b^a$	${}_jf_a \circ {}_ig_b = {}_j^iH_b^a$

D'après cette définition les équations associatives marchent comme dans l'exemple de la matrice triple.
Alors A' est une semi-catégorie associée à M' tel que :

$$\mathbf{M}' = \begin{pmatrix} 1 & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ M_{21} & (M_{21}M_{12}) & \dots & (M_{21}M_{1n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & (M_{n1}M_{12}) & \dots & (M_{n1}M_{1n}) \end{pmatrix}.$$

On ajoute des morphismes pour génèraliser le théorème sur les matrices de taille 3. On arrive surtout aux ensembles des morphismes suivants:

$A''(x_i, x_i) = \{{}_ie_1^1, ..., {}_ie_{M_{i1}}^{M_{1i}}, {}_ie_1, ..., {}_ie_{s_i}\}$ pour tout $i \in \{2, ..., n\}$

$A''(x_i, x_j) = \{{}_j^iH_1^1, ..., {}_j^iH_{M_{i1}}^{M_{1j}}, {}_j^iH_1, ..., {}_j^iH_{t_j^i}\}$ pour tout $i, j \in \{2, ..., n\}$ avec $i \neq j$
à condition que tous les ajoutés sont distincts, et en plus la loi de composition est définie par :

${}_ie_k \circ (...) = {}_ie_1 \circ (...)$ pour tout $k \in \{1, ..., s_i\}$ et $i \in \{2, ..., n\}$.

$(...) \circ {}_ie_k = (...) \circ {}_ie_{M_{i1}}^{M_{1i}}$ pour tout $k \in \{1, ..., s_i\}$ et $i \in \{2, ..., n\}$.

${}_ie_k \circ {}_ie_k = {}_ie_k$ pour tout $k \in \{1, ..., s_i\}$ et $i \in \{2, ..., n\}$.

${}_ie_k \circ {}_ie_p = {}_ie_{M_{i1}}^1$ pour tout $k, p \in \{1, ..., s_i\}$ et $i \in \{2, ..., n\}$.

${}^i_jH_p \circ (...) = {}^i_jH_1^1 \circ (...)$ pour tout $p \in \{1, ..., t_j^i\}$ et $i, j \in \{2, ..., n\}$.

$(...) \circ {}^i_jH_p = (...) \circ_j H_{M_{i1}}^{M1j}$ pour tout $p \in \{1, ..., t_j^i\}$ et $i, j \in \{2, ..., n\}$.

${}^i_jH_p \circ {}_ie_k = {}^i_jH_{M_{i1}}^1$ pour tout $k \in \{1, ..., s_i\}$,$p \in \{1, ..., t_j^i\}$ et $i, j \in \{2, ..., n\}$.

${}_je_k \circ {}^i_jH_p = {}^i_jH_{M_{i1}}^1$ pour tout $k \in \{1, ..., s_i\}$,$p \in \{1, ..., t_j^i\}$ et $i, j \in \{2, ..., n\}$.

Donc A'' une semi-catǵorie associée à la matrice M'' définie par:

$$\mathbf{M}'' = \begin{pmatrix} 1 & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ M_{21} & (M_{21}M_{12}) + s_i & \dots & (M_{21}M_{1n}) + t_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & (M_{n1}M_{12}+) + t_2^n & \dots & (M_{n1}M_{1n}) + s_n \end{pmatrix}.$$

On peut ensuite ajouter les identités sur $x_2, \dots, x_n$.
Finalement si $M = (M_{ij})_n$ une matrice positive d'order n telle que $M_{11} = 1$ alors $Cat(M) \neq \emptyset$ si et seulement si $M_{ii} > M_{1i}M_{i1} \forall i \in \{1, ..., n\}$ et $M_{ij} \geq M_{i1}M_{1j} \forall i, j \in \{1, ..., n\} i \neq j$.
On obtient le théorème suivant:

Théorème 4.2 *Si $M_{11} = 1$ et $M_{ii} > 1$ pour $i > 1$, avec $M_{ij} > 0$ $\forall i, j$, alors $Cat(M) \neq \emptyset$ si et seulement si $M_{ii} > M_{1i}M_{i1}$ $\forall i \in \{1, ..., n\}$ et $M_{ij} \geq M_{i1}M_{1j}$ $\forall i \neq j \in \{1, ..., n\}$.*

On doit maintenant traiter la possibilité que $M_{ii} = 1$ pour plusieurs i distincts.

Définition 4.3 *: Soit A une categorie d'ordre n avec objets $x_1, \dots, x_n$, on dit que x_i et x_j sont* isomorphes *s'il existe $f \in A(x_i, x_j)$ et $g \in A(x_j, x_i)$ tels que $fg = 1_{x_j}$ et $gf = 1_{x_i}$.*

Rq: Si x_i et x_j sont isomorphes, alors pour tout objet x_k on a des isomorphismes d'ensembles

$$A(x_k, x_i) \stackrel{\cong}{\to} A(x_k, x_j),$$

donnés par $h \mapsto fh$ dans une direction, et $u \mapsto gu$ dans l'autre; et

$$A(x_i, x_k) \stackrel{\cong}{\to} A(x_j, x_k),$$

donné par $h \mapsto hg$ dans une direction, et $u \mapsto uf$ dans l'autre. Si M est la matrice de A, on en déduit:

$$\forall k, \ \ M_{ki} = M_{kj}$$

et

$$\forall k, \ \ M_{ik} = M_{jk}.$$

Définition 4.4 *: Soit A une catégorie telle qu'il existe deux objets distincts x_i et x_j $(i \neq j)$ qui sont isomorphes, on dira que A est* non-réduite*. On dira que A est* réduite *sinon,c'est-à-dire si deux objets distincts sont toujours non-isomorphes. On dira qu'une matrice M est* non-réduite *s'il existe $i \neq j$ tel que*

$$\forall k, \ \ M_{ki} = M_{kj}$$

et

$$\forall k, \ \ M_{ik} = M_{jk},$$

cela veut dire que la ligne i égale la ligne j et la colonne i égale la colonne j. On dira qu'une matrice M est réduite *si elle n'est pas non-réduite.*

Rq: D'apres le debut ci-dessus, on obtient que si A est non-réduite, alors M est non-réduite. Donc, par contraposé si M est réduite alors A est réduite. Le contraire n'est pas forcémment vrai: il peut exister une catégorie A telle que M est non-réduite, mais A réduite, par exemple on peut avoir une catégorie A d'ordre 2 dont la matrice non-réduite est

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

mais telle que les deux objets de A sont non-isomorphes et donc A réduite.

Théorème 4.5 *Si M une matrice non réduite, on peut réduire M en une sous matrice N réduite telle que M marche si et seulement si N marche.*

En effet: Supposons que M est une matrice $n \times n$ non-réduite. On peut définir une rélation d'équivalence sur l'ensemble d'indices $\{1, \ldots, n\}$ en disant que $i \sim j$ si $\forall k, \ \ M_{ki} = M_{kj}$ et$\forall k, \ \ M_{ik} = M_{jk}$. Celle-ci est symétrique, reflexive et transitive. On obtient donc une partitionde l'ensemble d'indices en réunion disjointe de sous-ensembles

$$\{1,\ldots,n\} = U_1 \sqcup U_2 \sqcup \cdots \sqcup U_m$$

avec $U_a \cap U_b = \emptyset$, telle que tous les éléments d'un U_a donné sont équivalents, et les éléments de U_a ne sont pas équivalents aux éléments de U_b pour $a \neq b$. (Ce sont les classes d'équivalence pour la rélation d'équivalence). Choisissons un représantant $r(a) \in U_a$ pour chaque classe d'équivalence. Dans l'autre sens, on note par $c(i) \in \{1,\ldots,m\}$ l'unique élément telle que $i \in U_{c(i)}$. Ici $c(i)$ est la classe d'équivalence contenant i. On a

$$c(r(a)) = a$$

mais $r(c(i))$ n'est pas toujours égale à i: on a seulement qu'ils sont équivalents $r(c(i)) \sim i$. On obtient une sous-matrice de taille $m \times m$

$$N_{ab} := M_{r(a),r(b)}.$$

On peut faire en sorte que $r(a) < r(b)$ pour $a < b$: on choisit $r(a)$ le plus petit élément de U_a, et on numérote les classes U_a par ordre croissant de leur plus petit élément. Dans ce cas N est vraiement une sous-matrice de M. On a N réduite, puisque les éléments de U_a et U_b ne sont pas équivalents pour $a \neq b$. Si A est une catégorie dont la matrice est M, on obtient une sous-catégorie pleine $B \subset A$ qui consiste des objets $r(a)$ seulement, $a = 1,\ldots,m$. La matrice de B est N. Donc si M marche, alors N marche. L'équivalence entre i et $r(c(i))$ implique que pour tout k on a

$$M_{k,i} = M_{k,r(c(i))}, \quad M_{i,k} = M_{r(c(i)),k}.$$

On en déduit que pour tout i,j on a

$$M_{i,j} = M_{r(c(i)),j} = M_{r(c(i)),r(c(j))} = N_{c(i),c(j)}.$$

Ceci indique comment aller dans l'autre sens. Supposons que B est une catégorie dont la matrice est N. Notons par $y_1,\ldots,y_m$ les objets de B. On définit une catégorie A avec objets notés $x_1,\ldots,x_n$ en posant

$$A(x_i,x_j) \cong B(y_{c(i)},y_{c(j)}).$$

On pourrait définir

$$A(x_i, x_j) := \{(i, j, \beta), \quad \beta \in B(y_{c(i)}, y_{c(j)})\}.$$

La composition est la même que celle de B, i.e.

$$(i, j, \beta)(j, k, \beta') := (i, k, \beta\beta').$$

De même pour les identités, et les équations associatives et les règles des identités sont faciles à vérifier. Donc A est une catégorie.
On a:

$$|A(x_i, x_j)| = |B(y_{c(i)}, y_{c(j)})| = N_{c(i),c(j)} = M_{i,j}.$$

Donc A corréspond à la matrice M.
Finalement: étant donnée une matrice non-réduite M, on peut construire par la construction précédante une sous-matrice N qui est réduite, telle que M marche si et seulement si N marche. La sous-matrice N est unique à permutation d'indices près.

Lemme 4.6 *Soit M est une matrice réduite avec $M_{i,j} > 0$, et s'il existe $i \neq j$ tels que $M_{i,i} = 1$ et $M_{j,j} = 1$, alors M ne marche pas.*

En effet: On suppose que M marche alors il existe une catégorie A associée à M et comme M est réduite alors A est réduite. En plus $M_{i,i} = 1$ et $M_{j,j} = 1$ alors x_i et x_j sont isomorphes. En effet, $A(x_i, x_j)$ a $M_{ij} > 0$ éléments, on peut en choisir un f; et $A(x_j, x_i)$ a $M_{ji} > 0$ éléments, choisissons-en g. Alors $fg = 1$ et $gf = 1$ car $|A(x_i, x_i)| = M_{ii} = 1$ et $|A(x_j, x_j)| = M_{jj} = 1$. Alors A est non-réduite contradiction donc M ne marche pas.

Théorème 4.7 (Leinster [1]) *Soit $M = (m_{ij})$ une matrice carrée dont les coificients sont des entiers naturels et pour tout i $m_{ii} \geq 2$,alors Cat(M)$\neq \emptyset$ (i.e.d il existe une catégorie associé à M).*

En effet: Soit $M = (m_{ij})$ de taille avec $m_{ii} \geq 2$, on pose $n_{ij} := m_{ij}$ pour $i \neq j$ et $n_{ii} := m_{ii} - 1$. On peut définir une semicatégorie A associé à N dont les objets sont $1, 2, ..., n$, pour tout couple (i, j) on a une flèche Φ_{ij} :i $\rightarrow$ j tel que $\Phi_{ij} \neq 1_{ii}$,la loi de composition définit par si $f : i \rightarrow j$ et $g : j \rightarrow k$ Φ_{ij} alors $gf = \Phi_{ik}$. Ensuite on peut définir une catégorie B en rajoutant à A les identités, pour tout i on a $1_{ii} : i \rightarrow i$. La matrice de B est M.

Corollaire 4.8 *Pour toute matrice positive on peut étudier si cette matrice marche ou non.*

En effet: soit $M = (m_{ij})$ de taille n alors il y a deux cas :
a- $m_{ii} > 1$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$
b- il existe au moins une i' tel que $m_{i'i'} = 1$
Cas (a):
on a $Cat(M) \neq \emptyset$ d'aprés le théorème précédant.
Cas(b):
1- s'il existe une seule i' tel que $m_{i'i'} = 1$,on peut étudier cette matrice d'apres le théorème 4.1.
2- s'ils existent i,j,......l tel que $m_{ii} = m_{jj} = ... = m_{ll} = 1$ alors il y a deux cas:
-si M une matrice réduite alors M ne pas marche d'aprés (lemme 4.6) .
-si M une matrice non réduite alors il existe une matrice N réduction de M facile à étudier par récurrence.

Corollaire 4.9 *Si M est une matrice de taille $n \geq 3$ avec $m_{ij} \geq 1$, alors $Cat(M) \neq \emptyset$ si et seulement si, pour toute sous-matrice $N \subset M$ de taille* 3 *on a $Cat(N) \neq \emptyset$.*

En effet, dans l'étude précédente, dans les cas (a) et (b1) les conditions ne concernent que les triples d'indices i, j, k et donc ne concernent que les sous-matrices de taille 3. Pour cas (b2) si $m_{ii} = m_{jj} = ... = m_{ll} = 1$, la condition nécessaire et suffisante pour que M marche est que pour tout autre k on a $m_{ik} = m_{jk} = ... = m_{lk}$ et $m_{ki} = m_{kj} = ... = m_{kl}$, et que la sous-matrice définie en enlevant $j, ..., l$ marche d'après le cas (b1).

References

[1] C. Berger, T. Leinster. The Euler characteristic of a category as the sum of a divergent series. Homology, Homotopy Appl. 10 (2008), 41-51.

[2] S.Allouch. Classification des catégories finies. http://math.unice.fr∼carlos/documents/allouchJun07.pdf, Mémoire de M2, Nice, 15 juin (2007).

[3] G. Brinkmann, B. McKay. Posets on up to 16 Points. Order 19(2002), 147-179.

[4] M. Cuntz, I. Heckenberger. Weyl groupoids with at most three objects. Preprint arXiv:0805.1810v1 [math.GR].

[5] M. Fleming, R. Gunther, R. Rosebrugh. A Database of Categories. Journal of Symbolic Computation 35 (2003), 127-135.

[6] M. Forrester-Barker. Group objects and internal categories. Preprint arXiv:math/0212065v1.

[7] M. Kapranov. On the derived categories of coherent sheaves on some homogeneous spaces. Invent. Math. 92 (1988), 479-508.

[8] T. Leinster. The Euler characteristic of a category. Preprint arXiv:math/0610260v1 [math.CT].