Introduction

Si on étudie les intersections d'une conique (penser à une ellipse) et d'une droite du plan, intuitivement on perçoit au plus deux points d'intersections. Avec une droite et une cubique, on a au plus trois points d'intersection et avec deux coniques, au plus quatre points. Il apparait donc un lien entre les degrés des équations des courbes considérées et le nombre maximum de points d'intersection possible entre ces deux courbes.
Une question légitime et naturelle est alors de savoir si deux courbes planes C et C' de degré respectif d et d' ont toujours au plus d.d' points d'intersection.
Le théorème de Bézout est, ou plutôt résulte principalement en l'étude des points d'intersection de deux courbes, néanmoins, cette étude nécessite la connaissance d'un grand nombre d'objets mathématiques.
La géométrie algébrique, qui est l'étude des variétés algébriques définies en tant que lieu annulateur de polynôme.
Et les variétés affines et projectives qui nous permettront de présenter ce théorème dans sa plus grande généralité.
Puis nous établirons des relations entre les propriétés géométriques des courbes et certains objets algébriques, en élaborant progressivement une correspondance Géométrie-Algèbre.
Ainsi, on pourra énoncer le théorème de Bézout de son énoncé le plus simple et le plus général, à savoir :
"Dans un corps algébriquement clos, deux courbes projectives planes sans composantes communes de degré respectif d et d' ont exactement d.d' points d'intersection comptés avec leurs multiplicités." avec pour objectif final la démonstration du théorème. Mais cet énoncé "idéal" au sens où le nombre de points d'intersection est égal au produit des degrés pose quelques problématiques.

1 Les problématiques

1.1 Composante commune

Deux courbes C et C' peuvent avoir une composante commune, notion à laquelle on y portera plus ample attention avec la notion de composantes irréductibles. Néanmoins, un exemple simple pourra nous en donner une première approche. Ainsi, les courbes d'équation $x.y = 0$ et $x.(y-x) = 0$ ont en commun l'axe des y, c'est-à-dire la courbe d'équation $x = 0$, et leur intersection est alors infinie !
Il parait donc essentiel de fournir une première condition nécessaire, à savoir que les courbes C et C' sont sans composantes communes.

1.2 Le corps de base

Définition 1.1 (CORPS ALGÉBRIQUEMENT CLOS)
On dit qu'un corps K est algébriquement clos s'il vérifie l'une des trois propriétés équivalentes suivantes :

1. Tout polynôme F de $K[X_1, \ldots, X_n]$, de degré supérieur ou égal à 1 admet une racine dans K.
2. Tout polynôme irréductible de $K[X_1, \ldots, X_n]$ est de degré 1.
3. Tout polynôme non constant de $K[X_1, \ldots, X_n]$ se décompose en un produit de polynômes de degré 1.

Dans toute la suite du mémoire, nous considérons un corps de base K, où K est un corps algébriquement clos.
Soit $\mathbb{R}$, le corps des réels, non algébriquement clos, nous savons que la courbe d'équation $x^2 + y^2 - 1 = 0$ (qui décrit un cercle) et la droite $x = 2$ ne se rencontrent pas dans le plan $\mathbb{R}^2$ usuel puisque ce cercle centré en l'origine a pour rayon 1. En revanche, dans $\mathbb{C}^2$, l'équation $x^2 + y^2 - 1 = x - 2$ a bien deux solutions, c'est-à-dire que les courbes ont deux points d'intersection dans $\mathbb{C}^2$, les points $(2, i\sqrt{3})$ et $(2, -i\sqrt{3})$. On supposera donc que le corps de base est algébriquement clos.

1.3 Points à l'infini

Qu'en est-il de deux droites parallèles ou par exemple d'une courbe avec son asymptote ? Ces courbes n'ont, selon toute logique, pas de points d'intersection ! D'où, selon une nouvelle logique, l'introduction de points dits "à l'infini". C'est ainsi qu'on devra introduire un espace dit projectif (et dans notre cas un plan projectif noté $\mathbb{P}_2(\mathrm{K})$ où K est un corps algébriquement clos) dans lequel on observera dans le cas d'un plan projectif, des points à l'infini.
Il sera par ailleurs donné au chapitre IV une description du plan projectif $\mathbb{P}_2(\mathrm{K})$ sachant d'ores et déjà que $\mathbb{P}_2(\mathrm{K})$ s'identifie par définition à l'ensemble des droites vectorielles de K^3. Notons d'ailleurs que dans le cas où $K = \mathbb{C}$, c'est l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{C}^3$ lui-même isomorphe à $\mathbb{R}^6$.
D'où une évidente difficulté à tracer un tel cas de figure dans lequel on considèrerait une hyperbole et son asymptote qui aurait un point d'intersection double à l'infini (l'asymptote constituerait une "double" tangente à l'hyperbole en un point à l'infini) lorsque l'on se situe dans l'espace affine correspondant ; en effet la notion d'infini est une notion affine !

1.4 Multiplicité de l'intersection

Etudions le cas simple d'un cercle d'équation $x^2+y^2-1 = 0$ et de l'une de ses tangentes $x = 1$, ces deux courbes se coupent en un seul point (puisque l'on a considéré un cercle et sa tangente en un point particulier), point d'intersection de coordonnées (1,0) dans les conditions usuelles de la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Néanmoins, ce point de vue graphique est trompeur, en effet, si on résoud "l'équation d'intersection" qui correspond au système des deux équations de courbes, on aboutit à l'équation $y^2 = 0$ de telle sorte que $y = 0$ est une racine double ; on dit alors que le point d'intersection est multiple et il doit, dans ce cas précis, compter pour deux. De la même manière, une cubique $y^2 - x^3 = 0$ et une droite $y = t.x$ se coupent en deux points au lieu de trois, à savoir (t^2, t^3) et (0,0) mais ce dernier est double... (dû à la singularité de la cubique au point (0,0)). Ainsi, il parait donc essentiel de compter les points d'intersection avec leurs multiplicités, d'où le problème de la multiplicité de l'intersection ; un point simple aura pour multiplicité d'intersection un s'il est racine simple du système d'équation des deux courbes...

Pour se convaincre de la difficulté du problème de Bézout, on considère le trifolium et le quadrifolium [5] qui ont en commun le point (0,0) de multiplicité 14, quatre points réels à distance finie et deux points imaginaires à l'infini de multiplicité trois chacun !

2 Ensembles algébriques affines

2.1 Ensemble algébrique de K^2

Définition 2.1 (ESPACE AFFINE)
On appelle espace affine de dimension n l'ensemble K^n produit itéré n fois du corps de base K ; on le note aussi $A^n(K)$ ou A^n.
Ainsi, on appelle points les éléments de l'espace affine.
On dit que A^1 est la droite affine sur K et que A^2 est le plan affine sur K.

Définition 2.2 (ENSEMBLE ALGÉBRIQUE AFFINE)
Un point P de $A^n(K)$ est dit zéro de $f \in K[X_1, \dots, X_n]$ si $f(P) = 0$.
Si S est une partie de $K[X_1, \dots, X_n]$, on note $V(S)$ l'ensemble des éléments $P \in A^n(K)$ tel que $f(P) = 0$ pour tout $f \in S$.
Une partie de $A^n(K)$ de la forme $V(S)$ est appelée ensemble algébrique affine.
On a donc $V(S) := \{P \in A^n(K), \quad \forall f \in S, \quad f(P) = 0\}$.

Remarque : Un ensemble algébrique défini par un seul polynôme $f \in K[X_1, \dots, X_n]$ s'appelle une hypersurface algébrique de K^n. Si n=2, on parle de courbe algébrique plane définie sur K. Lorsque le degré du polynôme est égal à 1, on parle d'hyperplan de K^n.

Proposition 2.1
$K[X_1, \dots, X_n]$ est un anneau noethérien.

Remarque : On remarquera que $V(S) = V(I)$ si I est l'idéal de $K[X_1, \dots, X_n]$ engendré par S. Comme $K[X_1, \dots, X_n]$ est noethérien, un ensemble algébrique possède un système fini d'équations.

Propriétés
On a :

1. $V(0) = A^n(K)$ et $V(1) = \emptyset$

2. Si $I \subseteq J$ alors $V(J) \subseteq V(I)$
3. Si $\{J_i\}$ est une famille d'idéaux alors $V(\sum_i J_i) = V(\cup_i J_i) = \cap_i V(J_i)$
4. Si $\{J_1, \ldots, J_n\}$ est une famille finie d'idéaux alors $\cup_{i=1}^k V(J_i) = V(\cap_{i=1}^k J_i) = V(J_1 \ldots J_k)$

Remarque : On remarque que $\emptyset$ et $A^n(K)$ sont des ensembles algébriques affines. De plus, toute intersection et toute réunion finie d'ensembles algébriques de $A^n(K)$ sont des ensembles algébriques.

Les ensembles algébriques affines sont les fermés d'une topologie sur $A^n(K)$ appelée la topologie de Zariski.

Définition 2.3 (L'IDÉAL ANNULATEUR)
Soit Y une partie de $A^n(K)$; $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$ tel que $f(P) = 0$ pour tout $P \in Y$ est un idéal de $K[X_1, \ldots, X_n]$ noté $\mathcal{I}(Y)$ appelé l'idéal des polynômes s'annulant sur Y.

Propriétés
On a :

1. Si $Y \subseteq Z(\subseteq A^n(K))$ alors $\mathcal{I}(Z) \subseteq \mathcal{I}(Y)$
2. $\mathcal{I}(\emptyset) = K[X_1, \ldots, X_n]$
3. $\mathcal{I}(A^n(K)) = \emptyset$
4. Si I est un idéal de $K[X_1, \ldots, X_n]$, on a $I \subseteq \mathcal{I}(V(I))$. Si Y est une partie de $A^n(K)$, alors $Y \subseteq V(\mathcal{I}(Y))$
5. Pour tout idéal I de $K[X_1, \ldots, X_n]$, on a : $V(I) = V(\mathcal{I}(V(I)))$ et pour toute partie Y de $A^n(K)$, on a : $\mathcal{I}(Y) = \mathcal{I}(V(\mathcal{I}(Y)))$
6. Si S est un ensemble algébrique, on a : $V(\mathcal{I}(S)) = S$. Si $I = \mathcal{I}(T)$ où $T \subseteq A^n(K)$ on a : $I = \mathcal{I}(V(I))$ (I est l'idéal d'un ensemble algébrique).
7. $\mathcal{I}(Y)$ est un idéal radical : $\mathcal{I}(Y) = Rad(\mathcal{I}(Y))$.

Définition 2.4 (RÉDUCTIBILITÉ)
Un ensemble algébrique V de $A^n(K)$ est dit réductible s'il s'écrit comme la réunion de deux ensembles algébriques non vide de $A^n(K)$, $V = V_1 \cup V_2$ tels que $V_i \neq V$ avec i=1,2 ; sinon, V est dit irréductible.

Proposition 2.2
Les ensembles algébriques irréductibles de $A^n(K)$ correspondent aux idéaux premiers de $K[X_1, \ldots, X_n]$ et les points de $A^n(K)$ correspondent aux idéaux maximaux.

Remarque : $A^n(K)$ est irréductible.

Proposition 2.3
V est irréductible $\Longleftrightarrow \mathcal{I}(V)$ est premier.

Théorème 2.1
Tout ensemble algébrique V de $A^n(K)$ est réunion finie de sous-ensembles algébriques irréductibles $V_1, \ldots V_n$ où $V = V_1 \cup \ldots \cup V_k$ où $V_i \nsubseteq V_j$ si $i \neq j$ et une telle décomposition est unique à permutation près. On dit que les V_i sont les composantes irréductibles de V.

Proposition 2.4
Soit $F \in K[X, Y]$ un polynôme irréductible.
Alors $\mathcal{I}(V(F)) = (F)$ et $V(F)$ est irréductible.

Définition 2.5 (ANNEAU FACTORIEL)
On appelle anneau factoriel un anneau à “factorisation unique”, c'est-à-dire

1. Tout x non inversible s'écrit $x = a_1 \dots a_r$ où les a_i sont des irréductibles.
2. Si on a deux telles décompositions irréductibles $x = a_1 \dots a_r = b_1 \dots b_s$ alors $r = s$, et en réordonnant les a_i, a_i et b_i sont associés, c'est-à-dire $a_i = \epsilon b_i$ avec ϵ inversible.

Proposition 2.5
$K[X, Y]$ est un anneau factoriel.

Proposition 2.6
Soit $F \in K[X, Y]$. Soit $F = F_1^{m_1} \dots F_r^{m_r}$ une décomposition de F en facteurs irréductibles.
Alors $V(F) = V_1(F) \cup \dots \cup V_r(F)$ est la décomposition de $V(F)$ en composantes irréductibles, et $\mathcal{I}(V(F)) = (F_1 \dots F_r)$.

Proposition 2.7
Soient F et G deux éléments de K[X,Y] sans facteur commun.
Alors l'ensemble $V(F) \cap V(G)$ est fini.

Preuve : On applique le théorème de Bézout à F et G dans $K(X)[Y]$ qui est un anneau principal, c'est à dire $AF + BG = 1$. F et G n'ayant pas de facteur commun dans $K[X, Y]$, ils n'en ont pas non plus dans $K(X)[Y]$. F et G sont donc premiers entre eux dans $K(X)[Y]$.
Il existe R non nul avec $R \in K[X]$ tel que $A_0 F + B_0 G = R$ et $A = \frac{A_0}{R}$, $B = \frac{B_0}{R}$, avec A_0, $B_0 \in K[X, Y]$
Si $P = (a, b) \in V(F) \cap V(G)$ alors $F(P) = G(P) = 0$, on a $R(a) = 0$. Par les hypothèses R non nul, il n'y a qu'un nombre fini de a tel que $R(a) = 0$.
En procédant de la même manière, on voit qu'il n'y a qu'un nombre fini de points.

■

2.2 Le théorème des zéros de Hilbert (Nullstellensatz)

Théorème 2.2
Soit K un corps algébriquement clos.
Si J est un idéal propre de $K[X_1, \dots, X_n]$ alors $V(J) \neq \emptyset$.
Preuve : Il faut montrer que $J = (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$ pour tout idéal maximal J.

Théorème 2.3
Soit K un corps algébriquement clos, soit J un idéal de $K[X_1, \dots, X_n]$.
On a $\mathcal{I}(V(J)) = rad(J)$.

Corollaire : Si I est un idéal premier alors $V(I)$ est irréductible.

Proposition 2.8
Soit I un idéal de $K[X_1,\ldots,X_n]$. L'ensemble $V(I)$ est fini si et seulement si $K[X_1,\ldots,X_n]/J$ est espace vectoriel de dimension finie d sur K.
Dans ce cas, Card$(V(I))\leq d$.

3 Variétés affines

3.1 Anneau de coordonnée

On adoptera la terminologie variété affine pour désigner un ensemble algébrique affine irréductible. On dira aussi variété s'il n'y a pas d'ambiguité.
Les variétés affines de $A^2(K)$ sont $A^2(K), \emptyset$, les points et les courbes planes irréductibles, c'est-à-dire les sous-ensembles de la forme $V(F)$ où F est un polynôme irréductible.

Définition 3.1 (ANNEAU DE COORDONNÉE)
Soit V une variété. Une fonction $\varphi : V \to K$ est dite régulière s'il existe un polynôme $F \in K[X_1,\ldots,X_n]$ tel que $\varphi(P) = F(P)$ pour tous les points $P \in A$. (Pour une fonction φ donnée, le polynôme F n'est en général pas unique).
L'ensemble des fonctions régulières sur V est une K-algèbre, sous-algèbre de l'ensemble des applications de V dans K, munie de l'addition et de la multiplication provenant de K. On note $\Gamma(V)$ l'algèbre des fonctions régulières appelée anneau de coordonnées de V.

Proposition 3.1
Si V est un ensemble algébrique de $A^n(K)$, il existe un isomorphisme de K-algèbre

$$\Gamma(V) \equiv K[X_1,\ldots,X_n]/\mathcal{I}(V)$$

en particulier $\Gamma(V)$ est un anneau noethérien.

Preuve : On sait que $K[X_1,\ldots,X_n]$ est un anneau noéthérien d'après la proposition 2.1. Comme $I(V)$ est un idéal de $K[X_1,\ldots,X_n]$, $\Gamma(V)$ est un anneau noéthérien.

■

3.2 Anneaux locaux

Soit V une variété définie sur K.
L'idéal $\mathcal{I}(V)$ est premier ; l'anneau $\Gamma(V)$ est donc intègre et se plonge dans son corps des fractions K(V).

Définition 3.2 (CORPS DES FONCTIONS RATIONNELLES SUR V)
Le corps des fractions K(V) de son anneau de coordonnée $\Gamma(V)$ s'appelle le corps des fonctions rationnelles sur V.

Définition 3.3
Soit $f \in K(V)$ une fonction rationnelle sur V. On dit que f est définie au point $P \in V$ où f peut s'écrire $\frac{a}{b}$ avec $b(P) \neq 0$. L'ensemble des points de V où f n'est pas définie est appelé ensemble polaire de f.

Proposition 3.2
Si $f \in K(V)$, l'ensemble polaire de f est un sous ensemble algébrique de V.

Définition 3.4 (ANNEAU LOCAL)
Soit V une variété définie sur K, P un point de V. On note $\mathcal{O}_p(V)$ le sous anneau de K(V) formé des fonctions rationnelles définies en P. $\mathcal{O}_p(V)$ s'appelle l'anneau local de V en P.

- Soit S une partie multiplicative de A. On définit une relation d'équivalence : $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$ si et seulement si il existe $s \in S$ tel que $sad = sbc$ ou $s(ad - bc) = 0$.

  Preuve : La réflexivité et la symétrie sont évidentes. Il suffit de prouver la transitivité. Soit $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$ et $\frac{c}{d} \sim \frac{e}{f}$ où $a, c, e \in A$ et $b, d, f \in S$. Il existe $s, t \in S$ tels que $s(ad - bc) = 0$ et $t(cf - ed) = 0$ d'où $(ft)s(ad - bc) = 0$ et $(sb)t(cf - ed) = 0$. Donc $tfs(ad - bc) + sbt(cf - ed) = tsd(af - eb) = 0$ donc $\frac{a}{b} \sim \frac{e}{f}$

  ■
- On note $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}(A) = S^{-1}A = \{\frac{a}{b};\ a \in A;\ b \in S\}/\sim$
- $S^{-1}A$ a une structure d'anneau.

  Preuve : Il suffit de voir que les applications

$$\begin{aligned} S^{-1}A \times S^{-1}A &\to S^{-1}A \\ \left(\tfrac{a}{b}, \tfrac{c}{d}\right) &\mapsto \tfrac{ad+bc}{bd} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S^{-1}A \times S^{-1}A &\to S^{-1}A \\ \left(\tfrac{a}{b}, \tfrac{c}{d}\right) &\mapsto \tfrac{a}{b} \cdot \tfrac{c}{d} \end{aligned}$$

  sont bien définies. En effet, si $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$ et $\frac{a'}{b'} \sim \frac{c'}{d'}$ alors $\frac{ab'+a'b}{bb'} \sim \frac{cd'+c'd}{dd'}$ et $\frac{aa'}{bb'} \sim \frac{cc'}{dd'}$.

  ■
- L'application $\varphi : A \to S^{-1}A$ qui à a associe $\frac{a}{1}$ est un morphisme d'anneaux. Pour $\forall s \in S$,$\varphi(s)$ est inversible dans $S^{-1}A$.

  Preuve : Que φ soit un morphisme d'anneaux résulte de la structure d'anneau de $S^{-1}A$. Si $s \in S$, $\frac{s}{1}$ a pour inverse $\frac{1}{s}$.

  ■
- Si la partie multiplicative S contient l'élément 0, $S^{-1}A$ est réduit à 0.
- φ est injective si A est intègre et $0 \notin S$.
- Si S est le groupe des unités de A alors φ est un isomorphisme d'anneaux. (le groupe des unités de A est le groupes des éléments inversibles de A qui est une partie multiplicative)
- A est un anneau intègre, $S = A \backslash \{0\}$. $S^{-1}A$ est un corps. Si K est le corps des fractions de A alors on a un isomorphisme de corps :

$$\begin{aligned} S^{-1}A &\to K \\ \tfrac{a}{b} &\mapsto b^{-1}a \end{aligned}$$

- Soit P un idéal premier. $S = A/P$ est une partie multiplicative.
  $S^{-1}P$ est un idéal maximal de $S^{-1}A$.

Proposition 3.3
Si V est une variété définie sur K, on a :

$$\Gamma(V) = \cap_{P \in V} \mathcal{O}_P(V)$$

Proposition 3.4
L'idéal maximal de $\mathcal{O}_P(V)$ est

$$m_P(V) = \{f \in \mathcal{O}_P(V); f(P) = 0\}$$

On l'appelle l'idéal maximal de V en P.

Lemme 3.1
$\mathcal{O}_P(V)$ est un anneau local noethérien.

4 Espace projectif ; polynôme homogénéisé et déshomogénéisé

4.1 Description de $\mathbb{P}_2(K)$

La principale motivation pour introduire l'espace projectif a déjà été mentionné, il concerne le théorème de Bézout.
Dans l'espace affine, les résultats concernant les intersections sont toujours assortis de cas particuliers dus au parallèlisme, ainsi, dans le plan, deux droites distinctes se coupent en un point et un seul, sauf si elles sont parallèles. Dans l'espace projectif, il n'y aura plus d'exceptions !

Définition 4.1 (ESPACE PROJECTIF)
Soit K^{n+1} un K-espace vectoriel. de dimension $n+1$. L'espace projectif associé à K^{n+1} est noté $\mathbb{P}_n(K)$ et défini comme l'ensemble des sous espaces vectoriels de dimension 1 de K^{n+1}, c'est à dire l'ensemble des droites vectorielles (passant par l'origine) de K^{n+1}. Ou de façon équivalente comme l'ensemble quotient de $K^{n+1}\backslash\{0\}$ par la relation d'équivalence suivante :

$$(x_0, \ldots, x_n) \sim (y_0, \ldots, y_n) \text{ si } \exists \lambda \in K,\ \lambda \neq 0 \text{ tel que } y_i = \lambda.x_i \text{ pour } i = 0, \ldots, n.$$

Notons $\overline{x}$ la classe de $x = (x_0, \ldots, x_n)$.

Remarque : Tous les points décrits par une même droite sont donc équivalents.

Définition 4.2 (COORDONNÉES HOMOGÈNES)
Les coordonnées homogènes de $z \in \mathbb{P}_n(K)$ correspondent aux coordonnées $x = (x_0, \ldots, x_n)$, d'un point quelconque ($x \neq 0$) de la droite vectorielle de K^{n+1} identifiée à z (i.e., celle passant par z).

On définit alors les coordonnées homogènes d'un point quelconque d'un espace projectif à un facteur scalaire non nul près.

Remarque : Toute famille de $n+1$ éléments de K^{n+1}, non tous nuls détermine un point de $\mathbb{P}_n(K)$ selon la relation d'équivalence ; on le note $P = \overline{(x_0, \ldots, x_n)}$.

Pour tout i, on peut définir H_i^0 par l'équation $x_i = 0$.
Alors pour chaque indice i $(0 \leq i \leq n)$ les droites de K^{n+1} non contenues dans l'hyperplan H_i^0 rencontrent forcément l'hyperplan H_i^1 défini comme son analogue par l'équation $x_i = 1$, ce dernier étant parallèle à H_i^0. Ainsi, l'application qui, à chacune de ces droites associe le point où elle rencontre H_i^1 est une bijection de l'ensemble U_i de ces droites sur H_i^1. De plus, puisque les droites de K^{n+1} sont par définition les points de $\mathbb{P}_n(K)$, on peut donc dire que $\mathbb{P}_n(K)$ s'identifie à la réunion de H_i^1 et de l'ensemble des " points" correspondant aux droites contenues dans H_i^0, que l'on appelle alors "points" à l'infini de H_i^1.
Nous voyons donc que $\mathbb{P}_n(K)$ est la réunion des $n+1$ ensembles U_i $(0 \leq i \leq n)$.

Proposition 4.1
Tout espace affine se plonge dans un espace projectif dans lequel il est le complémentaire d'un hyperplan. On prolonge alors une application affine en application projective.

4.2 Formes homogènes et deshomogènes

Définition 4.3 (POLYNÔME HOMOGÉNÉISÉ/DESHOMOGÉNÉISÉ)
Si $g \in K[X_1, \ldots, X_n]$ est un polynôme de degré d, son homogénéisé g^* est le polynôme homogène de degré d de $K[X_1, \ldots, X_n]$: $g^*(X_1, \ldots, X_n) = X_0^d g(\frac{X_1}{X_0}, \ldots, \frac{X_n}{X_0})$.
D'autre part, si $F \in K[X_0, \ldots, X_n]$ est un polynôme homogène de degré d, on notera $F_* \in K[X_1, \ldots, X_n]$ le polynôme défini par $F_*(X_1, \ldots, X_n) = F(1, X_1, \ldots, X_n)$ c'est le polynôme déshomogénéisé de F.
Remarque : Il est facile de vérifier qu'il y a correspondance bijective entre les points $(x_0, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{P}_n(K)$ tels que $F(x_0, \ldots, x_n) = 0$ et $x_0 \neq 0$ et les points $(y_1, \ldots, y_n) \in A^n(K)$ tels que $F_*(y_1, \ldots, y_n) = 0$.
D'autre part, il y a correspondance bijective entre les points $(y_1, \ldots, y_n)$ de $A^n(K)$ tels que $g(y_1, \ldots, y_n) = 0$ et ceux $(x_0, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{P}_n(K)$ tels que $x_0 \neq 0$ et $g_*(x_0, \ldots, x_n) = 0$.

Proposition 4.2
1. $(FG)_* = F_* G_* \quad (fg)_* = f_* g_*$
2. Si r est la plus grande puissance de X_0 qui divise F, on a : $X_0^r (F_*)^* = F$; $(f^*)_* = f$
3. $(F+G)_* = F_* + G_*$
   Si f et $g \in K[X_1, \ldots, X_n]$ et si r (resp s) est le degré de g (resp de f) et en posant $t = r + s - deg(f+g)$ alors on a :

$$X_0^t (f+g)^* = X_0^r f^* + X_0^s g^* \quad \text{si } f+g \neq 0$$

Terminologie :

On appelle forme de degré d tout polynôme homogène de degré d. Les processus changeant f en f^* et F en F_* sont respectivement dits homogénéisation et deshomogénéisation.

4.3 Ensembles alébriques projectifs

Définition 4.4 (ZÉRO)
Un point $P \in \mathbb{P}_n(K)$ est un zéro d'un polynôme $f \in K[X_0, \ldots, X_n]$ si $f(P) = 0$ pour tous les choix de coordonnées homogènes de P.
On note alors $F(P) = 0$.

Proposition 4.3
Si P est un zéro de f et si $f = f_0 + \ldots + f_m$ est la décomposition de f en somme de formes f_i nulles ou de degré i. Alors P est un zéro de chaque f_i.

Définition 4.5 (ENSEMBLE ALGÉBRIQUE PROJECTIF)
Soit $S \subset K[X_0, \ldots, X_n]$ on définit $V(S) = \{P \in \mathbb{P}_n(K) \mid \forall F \in S \quad F(P) = 0\}$.
$V(S)$ est appelé ensemble algébrique projectif.

Corollaire : Chaque ensemble algébrique projectif de $\mathbb{P}_n(K)$ possède un système d'équations homogènes.

Définition 4.6 (IDÉAL ANNULATEUR)
Si $E \subset \mathbb{P}_n(K)$, on définit

$$I(E) = \{F \in K[X_0, \ldots, X_n] \mid \forall P \in E \quad F(P) = 0\}$$

$I(E)$ est appelé idéal annulateur de E.

Remarque : Soit J l'idéal engendré par S, Z l'idéal engendré par les parties homogènes des éléments de J ; on a : $V(S) = V(J) = V(Z)$.

Définition 4.7 (IDÉAL HOMOGÈNE)
Un idéal $J \subset K[X_0, \ldots, X_n]$ est dit homogène si dès que $F = \sum_{i=0}^{d} F_i \in J$ (F_i homogène de degré i), on a $F_i \in J$ pour $i = 0, \ldots, d$.

Exemple : Si $E \subseteq \mathbb{P}_n(K)$, $\mathcal{I}(E)$ est un idéal homogène de $K[X_0, \ldots, X_n]$.

4.4 Variétés projectives

Définition 4.8 (VARIÉTÉ PROJECTIVE)
Un ensemble algébrique projectif $V \subseteq \mathbb{P}_n(K)$ est dit irréductible s'il n'est pas réunion de deux sous-ensembles algébriques projectifs strictement inclus dans V.
Un tel V est appelé variété projective.

Exemple : $\mathbb{P}_n(K)$ est irréductible.

Les variétés projectives conservent les propriétés des variétés affines.

Proposition 4.4
Un ensemble algébrique projectif V est irréductible si l'idéal associé $\mathcal{I}(V)$ est premier. Comme dans le cas affine, un ensemble algébrique projectif s'écrit de façon unique comme l'union de variétés projectives, qu'on nomme décomposition irréductible de V.

5 Propriétés locales des courbes planes

5.1 Points multiples et droites tangentes

Les courbes affines planes correspondent à des polynômes non constants $F \in K[X,Y]$ sans facteurs multiples, où F est déterminée à la multiplication par un scalaire non nul prés. Nous allons modifier légèrement notre définition afin de prendre en compte la multiplicité des composantes.

Nouvelle terminologie :
Voici la nouvelle approche

1. $F, G \in K[X,Y]$ sont dits équivalents si $\exists \lambda \in K^*$ tel que $F = \lambda G$.
2. On définit les courbes affines planes comme les classes d'équivalence des polynômes non constants sous cette relation. On parlera de " la courbe plane $Y^2 - X^3$", voire "la courbe plane $Y^2 = X^3$.
3. Le degré d'une courbe est le degré d'un polynôme qui la définit. Alors les droites sont les courbes affines planes de degré 1.
4. Si $F = \prod F_i^{n_i}$,où les F_i sont les facteurs irréductibles de F, on appelle composantes irréductibles de F les F_i, on dit alors que les F_i sont de multiplicité n_i dans F.
5. Soit F une courbe, et $P = (a,b) \in F$. On note F_X la dérivée partielle de F par rapport à X. P est dit simple si $F_X(P) \neq 0$ ou $F_Y(P) \neq 0$. Dans ce cas, on appelle droite tangente à F en P la droite $F_X(P)(X-a) + F_Y(P)(Y-b) = 0$.
6. Si P n'est pas simple, il est dit multiple ou singulier. Une courbe sans points multiple est dite régulière.

5.2 Relation entre les points et les idéaux maximaux

Dans cette partie, on s'attardera à mettre en évidence la correspondance Algébre-Géométrie en reliant les idéaux maximaux aux points du plan.

Théorème 5.1
$\{$idéaux maximaux de $K[X,Y]\} = \{(X-a, Y-b)\}$ avec (a,b) un point.

$$\begin{aligned}\{\text{idéaux maximaux de } K[X,Y]/(F)\} &= \{(X-a, Y-b)\text{tel que } F(a,b) = 0\} \\ &= \{P \in K[X,Y]\ ,\ (F) \subseteq P\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{\text{idéaux maximaux de } K[X,Y]/(F,G)\} &= \{P \in K[X,Y] \mid (F,G) \subseteq P\} \\ &= \{(X-a, Y-b) \text{ tel que } F(a,b) = 0 \text{ et } G(a,b) = 0\}\end{aligned}$$

On admettra ce théorème.

Proposition 5.1
Soit I un idéal de A

$$\begin{array}{rl} \varphi : A & \longrightarrow S^{-1}A \\ a & \longmapsto \frac{a}{b}\ (b \in S) \end{array}$$

$\varphi(S) \in A/I$ et $S^{-1}I \subset S^{-1}A$
On note S/I l'idéal de $S^{-1}A$ engendré par $\varphi(S)$.

Notation : $\overline{a}$ est égale à la classe de a modulo la classe d'équivalence de l'idéal.
$[\frac{a}{b}]$ est égale à la classe de $\frac{a}{b}$ dans l'anneau local.

$$\begin{array}{rl} \phi : (S/I)^{-1}(A/I) & \overset{\approx}{\to} S^{-1}A/S^{-1}I \\ \frac{[\overline{a}]}{[\overline{b}]} & \longmapsto \overline{[\frac{a}{b}]} \end{array}$$

Preuve : Cette application est un isomorphisme d'anneaux car elle est bien définie, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas des représentants choisis.
Soient $[\frac{\overline{a}}{\overline{b}}]$ et $[\frac{\overline{a}'}{\overline{b}'}]$ deux représentants tels que :

$$\phi([\frac{\overline{a}}{\overline{b}}]) = \phi([\frac{\overline{a}'}{\overline{b}'}]) \text{ si et seulement si } \overline{[\frac{a}{b}]} = \overline{[\frac{a'}{b'}]}.$$

Ainsi $[\frac{a}{b}]$ et $[\frac{a'}{b'}]$ sont dans la même classe d'équivalence définie par l'idéal.
De plus $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ sont aussi dans la même classe d'équivalence définie par la fraction.
Soient $\overline{[\frac{a}{b}]}$ et $\overline{[\frac{a'}{b'}]}$ deux représentants tels que :

$$\phi^{-1}(\overline{[\frac{a}{b}]}) = \phi^{-1}(\overline{[\frac{a'}{b'}]}) \text{ c'est-à-dire } [\frac{\overline{a}}{\overline{b}}] = [\frac{\overline{a'}}{\overline{b'}}]$$

Ainsi $\frac{\overline{a}}{\overline{b}}$ et $\frac{\overline{a}}{\overline{b}}$ sont dans la même classe d'équivalence définie par la fraction.
Et comme $\overline{(\frac{a}{b})} = \frac{\overline{a}}{\overline{b}}$, $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ sont aussi dans la même classe d'équivalence définie par l'idéal.

■

5.3 Multiplicité

Définition 5.1 (MULTIPLICITÉ)
Soit $F = F_m + F_{m+1} + \ldots + F_n$, où les F_i sont des formes de degré respectif i, et $F_m \neq 0$. On appelle multiplicité de F au point $P = (0,0)$, et on note $m_P(F)$ l'entier m. Ecrivons $F_m = \prod L_i^{n_i}$ avec les droites distinctes. Les L_i sont appelées droites tangentes à F en $P = (0,0)$ de multiplicité n_i.
Si F a m tangentes simples distinctes, on dit que P est un point multiple ordinaire de F. Un point double ordinaire est appelé noeud.

Soit $F = \prod F_i^{n_i}$ la factorisation de F en composantes irréductibles. Alors $m_P(F) = \sum n_i.m_P(F_i)$. Si L est une droite tangente à F_i d'ordre r_i, alors L est tangente à F avec la multiplicité $\sum n_i.r_i$.

Remarque : Un changement de coordonnées permet de définir de même la multiplicité de F en un point (a, b) quelconque.

<u>**Théorème**</u> 5.2
Soit J un idéal de $K[X_1, \ldots, X_n]$ tel que $V(J) = \{P_1, \ldots, P_n\}$ soit fini. Il existe un isomorphisme naturel de K-algèbre.

$$K[X_1, \ldots, X_n]/J \xrightarrow{\equiv} \prod_{i=1}^{n} (\mathcal{O}_{P_i}(K^n)/J\mathcal{O}_{P_i}(K^n))$$

La preuve de ce théorème dépasse le cadre de ce mémoire.

<u>**Théorème**</u> 5.3

$$dim_K(K[X_1, \ldots, X_n]/J) = \sum_{i=1}^{N} dim_K(\mathcal{O}_{P_i}(K^n)/J\mathcal{O}_{P_i}(K^n)) < \infty$$

On pourra prouver directement le corollaire sans passer par le théorème. Nous allons expliciter les idéaux maximaux de $S^{-1}A$ où A est une K-algèbre et $S = \{u^k, k \geq 0\} \subset A$ une partie multiplicative.

- Si $\mathcal{P} \subset A$ est un idéal maximal, on considère alors l'application :

$$\begin{aligned} \pi : A &\longrightarrow S^{-1}A \\ a &\mapsto \tfrac{a}{b}\ ,\ (b \in S) \end{aligned}$$

-

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } (\pi(\mathcal{P})) = (S^{-1}A).\pi(\mathcal{P}) &= \{\tfrac{a}{s}\ ,\ s \in S\ ,\ a \in \mathcal{P}\}/\sim \\ : &= S^{-1}\mathcal{P} \end{aligned}$$

  En effet, prouvons la double inclusion :
  $\subset$: $\pi : p \in \mathcal{P} \mapsto \frac{p}{b}, \quad b \in S \quad \pi(\mathcal{P}) \subset S^{-1}P$
  Et donc $(S^{-1}A).\pi(\mathcal{P}) \subset S^{-1}\mathcal{P}$ puisque $S^{-1}P$ est un idéal.
  $\supset$: Puisque $a \in \mathcal{P}$, en particulier, vu que $\mathcal{P} \subset A$, $a \in A$.
- Voyons à présent si $S^{-1}\mathcal{P}$ est un idéal maximal.
  Nous avons déjà vu l'isomorphisme :

$$\begin{aligned} S^{-1}A/S^{-1}\mathcal{P} &\xrightarrow{\approx} (\text{“}S/\mathcal{P}\text{''})^{-1}.(A/\mathcal{P}) \\ \overline{[\tfrac{a}{b}]} &\mapsto \tfrac{[\overline{a}]}{[\overline{b}]} \end{aligned}$$

$$\text{Avec } S/\mathcal{P} = \varphi(S) \text{ où}$$

$$\begin{aligned} \varphi : A &\to A/\mathcal{P} \\ s &\mapsto \overline{s} \end{aligned}$$

- Pour que $S^{-1}\mathcal{P}$ soit un idéal maximal de $S^{-1}A$, il faut et il suffit que $S^{-1}A/S^{-1}\mathcal{P}$ soit un corps donc par l'isomorphisme, que ("$S/\mathcal{P}$")$^{-1}.(A/\mathcal{P})$ soit un corps.
  On considère les applications suivantes :

$$\begin{array}{ll} A & \xrightarrow{\varphi} A/\mathcal{P} \to S^{-1}A/S^{-1}P = (S/\mathcal{P})^{-1}(A/\mathcal{P}) \\ A & \xrightarrow{\pi} S^{-1}A \to S^{-1}A/S^{-1}P \end{array}$$

  Avec $A/\mathcal{P}$ un corps puisque $\mathcal{P}$ est un idéal maximal par hypothèse.
-
$$\varphi(S) \subset A/\mathcal{P} - \{0\} \Longleftrightarrow S \cap \mathcal{P} = \emptyset$$

  En effet, il n'y a pas de $s \in S$ tel que $\varphi(s) = \overline{s} = \overline{0}$. Les seuls s tels que $\varphi(s) = \overline{0}$ appartiennent à $\mathcal{P}$ d'où $S \cap P = \emptyset$.
  Par définition, $\varphi(S) \subset A/\mathcal{P}$ et par hypothèse $S \cap \mathcal{P} = \emptyset$, il n'y a pas de $s \in S$ tel que $\varphi(s) = \overline{0}$ donc $0 \notin \varphi(S)$ d'où $\varphi(S) \subset A/\mathcal{P} - \{0\}$.

Théorème 5.4
Si $S \subset A^*$ (éléments inversibles de A) alors

$$\begin{array}{rl} A & \xrightarrow{\approx} S^{-1}A \\ s^{-1}a & \mapsto a/s \end{array}$$

On admettra ce théorème.

- Donc si $\varphi(S) \subset A/\mathcal{P} - \{0\}$ alors puisque $A/\mathcal{P}$ est un corps, $\varphi(S)$ ne contient que des éléments inversibles de $A/\mathcal{P}$. Par le théorème précédent et les applications ci-dessus $A \xrightarrow{\approx} S^{-1}A$ d'où $A/\mathcal{P} \approx S^{-1}A/S^{-1}\mathcal{P} = \varphi(S)^{-1}(A/\mathcal{P})$

$$0 \in \varphi(S) \Longleftrightarrow S \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$$

- Si $0 \in \varphi(S)$ alors $0 \in S$, c'est à dire $S^{-1}A$ est réduit à $\{0\}$ donc $S^{-1}A = S^{-1}\mathcal{P}$.

$$S^{-1}A/S^{-1}\mathcal{P} = \varphi(S)^{-1}(A/\mathcal{P}) = \{0\}$$

  Dans ce cas là $S^{-1}\mathcal{P}$ ne peut être un idéal maximal.

Conclusion : La seule possibilité pour que $S^{-1}\mathcal{P}$ soit un idéal maximal est que $0 \notin \varphi(S)$. On a vu que $A/\mathcal{P} \approx S^{-1}A/S^{-1}\mathcal{P} = \varphi(S)^{-1}(A/\mathcal{P})$. Par hypothèse, $A/\mathcal{P}$ est un corps donc $S^{-1}A/S^{-1}\mathcal{P}$ est un idéal maximal. Les idéaux maximaux de $S^{-1}A$ sont exactement les $S^{-1}\mathcal{P}$ pour $\mathcal{P} \subset A$ idéaux maximaux tel que $0 \notin \varphi(S)$.
Rappel :
Dans notre cas $S = \{u^k\ ,\ k \geq 0\}$ et $\varphi(S) = \{\varphi(u)^k\ ,\ k \geq 0\} \subset A/\mathcal{P}$.

1.
$$0 \in \varphi(S) \Longleftrightarrow \exists k \text{ tel que } \varphi(u)^k = 0 \Longleftrightarrow \varphi(u) = 0 \text{ car } A/\mathcal{P} \text{ est intègre.}$$

2. Les idéaux maximaux de A_u sont les $\mathcal{P}A_u$ où $u \notin \mathcal{P}$.

$$\text{Soit } 0 \notin \varphi(S) \iff u \notin \mathcal{P} \implies S^{-1}\mathcal{P} = \mathcal{P}A_u \subset A_u \text{ idéal maximal}$$

$A_u = S^{-1}A$ ainsi on a vu : $A_u/\mathcal{P}A_u \approx A/\mathcal{P}$.

3.
$$0 \in \varphi(S) \iff u \in \mathcal{P} \implies S^{-1}\mathcal{P} = S^{-1}A$$

$S^{-1}\mathcal{P} = \mathcal{P}A_u \quad S^{-1}A = A_u$ d'où $\mathcal{P}A_u = A_u$.

On admettra les résultats suivants :
Si A est une K-algèbre avec $dim_K A < \infty$, alors

1. Card (idéaux maximaux de A) $< \infty$
2. Pour tout $\mathcal{P} \subset A$ un idéal maximal, on a $\psi\ :\ K \xrightarrow{\approx} A/\mathcal{P}$

Notation : Pour $u \in A$, on note par $u(\mathcal{P})$ l'élément a de K tel que $\psi(a) = \overline{u} \in A/\mathcal{P}$
Exemple : $u(\mathcal{P}) = 0 \iff u \in \mathcal{P}$.

Théorème 5.5
Si $dim_K A < \infty$ alors $dim_K A = \sum_{\mathcal{P}_{max} \subset A} dim_K A_{\mathcal{P}}$

Preuve : On procède par récurrence sur n, n étant le nombre d'idéaux maximaux de A.
On admet le cas où $n = 1$, c'est- à-dire où A possède un unique idéal maximal.
Pour $n \geq 2$: on considère deux idéaux maximaux distincts dans A.
Soient $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ ces deux idéaux maximaux.
Il existe $u \in \mathcal{P}_0$, $u \notin \mathcal{P}_1$ tel que si $a = u(\mathcal{P}_1)$ on ait $u \in \mathcal{P}_0$ et $v - u \in \mathcal{P}_1$.
$v = a - u$
$v \in \mathcal{P}_1$
$v \notin \mathcal{P}_0$ car $a \neq 0$.
Regardons les anneaux A_u, A_v, A_{uv}.
$\{$idéaux maximaux de $A_u\} = \{\mathcal{P}$ maximaux $\subset A$ tel que $u \notin \mathcal{P}\}$ $\not\ni \mathcal{P}_0$
$\{$idéaux maximaux de $A_v\} = \{\mathcal{P}$ maximaux $\subset A$ tel que $v \notin \mathcal{P}\}$ $\not\ni \mathcal{P}_1$
$\{$idéaux maximaux de $A_{uv}\} = \{\mathcal{P}$ maximaux $\subset A$ tel que $uv \in \mathcal{P}\}$ $\not\ni \mathcal{P}_0$ $\not\ni \mathcal{P}_1$
On introduit les lemmes et corollaires suivants :

Lemme 5.1
Si $(u, v) = A$ dans A, on a la suite exacte de K-espace vectoriel :

$$\begin{array}{ccccc} 0 \to & A \to & A_u \oplus A_v \to A_{uv} & \to 0 \\ & a \mapsto & (a, u) & \\ & & (a, b) \mapsto a - b & \end{array}$$

Preuves par des exemples : La preuve complète dépasse le cadre de ce mémoire, cependant on peut voir sur des exemples comment ça marche.

Pour l'injectivité, soit $X \in A$ tel que $X = 0$ dans A_u et dans A_v.
$\exists k, l$ tel que $u^k X = 0$ et $v^l X = 0$.
Pour $N \geq k+l$, $\quad (au+bv)^{k+l} = (a^{k+l}u^{k+l} + \ldots + b^{k+l}v^{k+l})X = 0$.
Pour la surjectivité, avec $au + bv = 1$ on a une décomposition en combinaison linéaire de $\frac{1}{uv}$ et $\frac{1}{u^2v^3}$ par exemple.
$\frac{1}{uv} = \frac{a}{u} + \frac{b}{v}$ et $\frac{1}{u^2v^3} = \frac{1}{v}(\frac{b^2}{u^2} + \frac{2ab}{uv} + \frac{a^2}{v^2})$.
De plus, pour un élément $(\frac{m}{u^n}, \frac{n}{v^l}) \in A_u \oplus A_v$ tel que $\frac{m}{u^k} - \frac{n}{v^l} = \frac{mv^k}{(uv)^k} - \frac{nu^l}{(uv)^l} = 0$ dans A_{uv} on veut obtenir un élément de A.

Lemme 5.2

$$\exists m \text{ tel que } (uv)^m v^l m = (uv)^m n u^k$$

Par hypothèse $(u, v) = A$ et supposons $k, l \geq 1$. Regardons le cas $k = l = m = 1$, on a d'après le lemme 5.2 que $uv^2m = u^2vn$.
Or puisque $au + bv = 1$, $(au + bv)^3 e = e$ avec $e = m/u, n/v$.
On otient donc $e = a^3u^3m + 3a^2buvm + 3ab^2uvn + b^3v^2n$.
On veut voir que $e \in A_u$, c'est-à-dire $u^2e = um$.
D'après le résultat du lemme dans ce cas, on a :
$u^2e = um(au + bv)^3 = um$.

Corollaire :

$$dim_K A = dim_K A_u + dim_K A_v - dim_K A_{uv}$$

Lemme 5.3
Si $\mathcal{P} \subseteq A$ un idéal maximal tel que $u \notin \mathcal{P} \Longleftrightarrow \mathcal{P}A_u \subseteq A_u$ un idéal maximal :
on a $A_{\mathcal{P}} \approx (A_u)_{\mathcal{P}A_u}$
d'où

$$dim_K A_{\mathcal{P}} = dim_K (A_u)_{\mathcal{P}A_u}$$

Corollaire :

$$\sum_{\mathcal{P}_{max} \subset A \text{ et } u \notin \mathcal{P}} dim_K A_{\mathcal{P}} = \sum_{Q_{max} \subseteq A_u} dim_K (A_u)_Q$$

Pour Card(idéaux maximaux de A_u) $< n$, l'hypothèse de récurrence s'applique :

$$dim_K A_u = \sum_{Q_{max} \subset A_u} dim_K (A_u)_Q$$

Et d'après le corollaire, on a

$$dim_K A_u = \sum_{\mathcal{P}_{max} \subset A \text{ et } u \notin \mathcal{P}} dim_K A_{\mathcal{P}}$$

Maintenant on veut remonter de A_u à A. On utilise la suite exacte, par la correspondance des idéaux maximaux de A avec $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$

$$dim_K A = \sum_{\mathcal{P}_{max} \subset A \text{ et } u \notin \mathcal{P}} dim_K A_{\mathcal{P}} + \sum_{\mathcal{P}_{max} \subset A \text{ et } v \notin \mathcal{P}} dim_K A_{\mathcal{P}} - \sum_{\mathcal{P}_{max} \subset A \text{ et } uv \notin \mathcal{P}} dim_K A_{\mathcal{P}}$$

D'après

$$dim_K A = dim_K Au + dim_K Av - dim_K Auv$$

Ceci étant vrai pour le corollaire de la suite exacte, la récurrence est donc vérifiée.

Preuve du théorème 5.3 :
D'après la proposition 5.1, on a

$$\mathcal{O}_{\mathcal{P}_i}(K[X_1, \ldots, X_n])/J\mathcal{O}_{\mathcal{P}_i}(K[X_1, \ldots, X_n]) \approx \mathcal{O}_{\mathcal{P}_i}(K[X_1, \ldots, X_n]/J$$

5.4 Nombre d'intersection

Définition 5.2

$$I(P, F \cap G) = dim_K(\mathcal{O}_P(K^2)/(F, G))$$

Théorème 5.6
Cette application

$$\begin{array}{rl} I : K^2 \times (K[X,Y] - \{0\})^2 & \to \mathbb{N} \cup \{\infty\} \\ (P; F, G) & \longmapsto I(P, F \cap G) \end{array}$$

appelé le nombre d'intersection de F et G au point P vérifie les propriétés suivantes :

1. $I(P, F \cap G) = \infty$ si F et G ont un facteur commun H qui passe par P.
2. $I(P, F \cap G) = 0 \Longleftrightarrow P \notin V(F) \cap V(G)$.
3. $I(P, F \cap G) = I(P, G \cap F)$ pour tous P, F et G.
4. $I(P, F \cap G)$ est invariant par changement affine de coordonnées.
5. $I(P, F \cap G) \geq m_P(F).m_P(G)$, avec égalité si et seulement si F et G n'ont pas de tangentes communes en P.
6. $$\text{Si } F = \prod_{i=1}^{m} F_i^{r_i} \text{ et } G = \prod_{j=1}^{n} G_i^{s_i} \text{ alors}$$
   $$I(P, F \cap G) = \sum_{i,j} r_i s_j I(P, F_i \cap G_j)$$
7. On a $I(P, F \cap G) = I(P, F \cap (G + AF))$ pour tout polynôme $A \in K[X,Y]$. (Autrement dit $I(P, F \cap G)$ ne dépend essentiellement que de l'idéal (F,G)). De plus, lorsque F et G n'ont pas de facteur commun passant par P, on a :

Remarque : On a $dim_K A_P = dim_K(\mathcal{O}_P((K^2)/(F,G))$ car pour $A = K[X,Y]/(F,G)$ et á l'aide du théorème 5.3, $A_p = (K[X,Y]/(F,G))_p \approx K[X,Y]_p/(F,G)_p$
En conclusions nous avons :

Proposition 5.2
$dim_K K[X,Y]/(F,G) = \sum_{P_{max}\in A} dim_K(\mathcal{O}_P(K[X,Y])/(F,G)) = \sum_{P\in A} I(P, F\cap G)$.

Remarque : D'après le théorème 5.4, nous avons :

$$dim_K K[X,Y]/(F,G) = \sum_{P_{max}\in A} dim_K(\mathcal{O}_P(K[X,Y])/(F,G))$$

et d'après la définition du nombre d'intersections et la remarque précédente, on a :

$$\sum_{P_{max}\in A} dim_K(\mathcal{O}_P(K[X,Y])/(F,G)) = \sum_{P\in A} I(P, F\cap G)$$

Exemple du théorème 5.3 :
Nous pouvons voir le cas particulier où $A = K[X]$ et $I = (F)$ avec $F = \prod_i (X-a_i)^{m_i}$ et $P_i = (X-a_i)$. P_i est un idéal maximal :

$$\begin{aligned} \varphi : K[X] &\to K \\ P(X) &\mapsto P(a_i) \end{aligned}$$

$Ker(\varphi) = \{P(a_i) = 0\} = (X-a_i)$.
φ est surjective car pour tout $b \in K$, il existe $P \mid P(a_i) = b$.
Par passage au quotient, $K[X]/(X-a_i) \approx K$. Comme K est un corps, $(X-a_i)$ est un idéal maximal.

$$K[X]/(F) = K[X]/\prod_i (X-a_i)^{m_i} = \prod_i K[X]/(X-a_i)^{m_i} = \oplus_i K[X]/(X-a_i)^{m_i}$$

car les a_i étant distincts, les $X - a_i$ sont premiers entre eux.
Par l'isomorphisme naturel du théorème 5.3 :

$$K[X]/(F) = \oplus_i \mathcal{O}_{P_i}(K[X])/(X-a_i)^{m_i}$$

Et puisque $a_j \neq a_i$, $X - a_j$ est inversible et $X - a_j \notin P_i$

$$K[X]/(F) = K[X]/(X-a_i)^{m_i}$$

et donc
$$K[X]/(F) = K[X]/(X-a_i)^{m_i} \approx K[X]/P_i \approx \mathcal{O}_{P_i}(K[X])/(F).$$

6 Courbes projectives planes

6.1 Définitions

Définition 6.1 (COURBES PROJECTIVES PLANES)
Une courbe projective plane sera une classe d'équivalence de polynômes homogènes non identiquement nuls dans $K[X, Y, Z]$ pour la relation $F \sim G$ s'il existe $\lambda \in K$ $(\lambda \neq 0)$ tel que $G = \lambda.F$.

Il faut utiliser le chapitre 4 pour passer entre ces polynômes homogènes et leurs déshomogénéisés qu'on notera aussi F et G, éléments de $K[X, Y]$.

6.2 Le théorème de Bézout

Théorème de Bézout

Soient F et G deux courbes projectives planes de degré respectif m et n n'ayant pas de composante commune. Alors

$$\sum_P I(P, F \cap G) = m.n$$

Preuve : Comme dans le cas affine, $F \cap G$ est fini, donc on peut supposer quitte à effectuer un changement linéaire de coordonnées qu'aucun des points de $F \cap G$ ne se trouve sur la droite à l'infini $Z = 0$.

On pose $\Gamma = K[X, Y]/(F, G)$

$R = K[X, Y]$

Γ_d est définit comme l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à d dans Γ.

R_d est défini comme l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à d dans R.

- Grâce à la proposition 5.2, le théorème sera démontré si l'on prouve que : $\underline{dim_K K[X, Y]/(F, G) = dim_K \Gamma_d = m.n}$
- Montrons que $dim_K \Gamma_d = m.n$

On introduit plusieurs applications :

- Il est plus clair que si $d \geq m$ et $A \in K[X, Y]_{d-m}$ alors $A.F \in K[X, Y]_d$. De même si $d \geq n$ et $B \in K[X, Y]_{d-n}$ alors $B.G \in K[X, Y]_d$.

  Donc pour $d \geq m$ et $d \geq n$; on a une application linéaire φ :

$$\begin{array}{rl} K[X, Y]_{d-m} \times K[X, Y]_{d-n} & \xrightarrow{\varphi} K[X, Y]_d \\ (A, B) & \mapsto A.F + B.G \end{array}$$

- De la même manière, si $d \geq m + n$ et $C \in K[X, Y]_{d-m-n}$ alors $C.G \in K[X, Y]_{d-m}$ et $-C.F \in K[X, Y]_{d-n}$.

  On a donc une autre application linéaire ψ :

$$\begin{array}{rl} K[X, Y]_{d-m-n} & \xrightarrow{\psi} K[X, Y]_{d-m} \times K[X, Y]_{d-n} \\ C & \mapsto (C.G, -C.F) \end{array}$$

- Enfin, on introduit la projection canonique $\Pi : R_d \to \Gamma_d$.
  Il en résulte une suite exacte :

$$0 \to R_{d-m-n} \xrightarrow{\psi} R_{d-m} \times R_{d-n} \xrightarrow{\varphi} R_d \xrightarrow{\Pi} \Gamma_d \to 0.$$

qui est bien définie car :

- $Im(\psi) = Ker(\varphi) = (F, G)$
- ψ est injective : puisque ψ est linéaire, montrons que $Ker(\psi) = \{0\}$

$$Ker(\psi) = \{C \in K[X,Y]_{d-m-n} \mid \psi(C) = (0,0)\} = \{0\}$$

- Π est surjective, ceci est évident car $\Gamma_d = \frac{K[X,Y]_d}{\{Fa+Gb\}_d}$
  On ne montre pas que φ est surjective mais que l'image de φ est égale à $Ker(\Pi)$
  Pour cela, on prend un u dans $\mathbb{R}_d$ tel que $\Pi(u) = 0$, équivalent comme indiqué au fait que $u = A.F + B.G$.

Raisonnons par l'absurde.
Supposons qu'il existe a_i et b_j tel que

$$A = a_i + \ldots + a_{d-m} + \ldots + a_0, \quad i > d-m$$

ou bien

$$B = b_j + \ldots + b_{d-n} + \ldots + b_0, \quad j > d-n$$

On prend par exemple le cas où $i > d-m$ et $i+m \geq j+n$. Dans ce cas $i+m > d$ et on ne peut pas avoir $j+n < i+m$ puisque u est de degré d et ainsi $AF+BG$ aurait un terme principal de degré $i+m > d$.
Donc $i+m = j+n$ et

$$u = a_i f_m + \ldots + b_j g_n + \text{ termes de degré } < i+m$$

$$\text{avec } \begin{aligned} F &= f_m + \ldots + f_0 \\ G &= g_m + \ldots + g_0 \end{aligned}$$

Or $a_i f_m + b_j g_n \neq 0$ car f_m et g_n sont des polynômes homogènes, n'ayant pas de composantes communes et donc sans facteurs communs.
En utilisant le fait que $dim\ R_d = \frac{(d+1)(d+2)}{2}$ et les formules de dimensions de la suite exacte, on a donc :

$$\begin{aligned} dim_K\ \Gamma_d &= dim_K\ R_d - dim_K(R_{d-m} \times R_{d-n}) + dim_K\ R_{d-m-n} \\ &= dim_K\ R_d - dim_K R_{d-m} - dim_K R_{d-n} + dim_K\ R_{d-m-n} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc} = & \frac{(d+1)(d+2)}{2} & - & \frac{(d-m+1)(d-m+2)}{2} \\ - & \frac{(d-n+1)(d-n+2)}{2} & + & \frac{(d-m-n+1)(d-m-n+2)}{2} = m.n \end{array}$$

donc $dim\ \Gamma_d = m.n$
Il nous reste donc à démontrer que $dim_K\ \frac{K[X,Y]}{(F,G)} = dim_K\ \Gamma_d$
Considérons maintenant une autre application γ :

$$\begin{array}{rcl} \gamma : \frac{K[X,Y]_d}{(F,G)\cap K[X,Y]_d} & \longrightarrow & \frac{K[X,Y]_{d+1}}{(F,G)\cap K[X,Y]_{d+1}} \\ [u]^d & \mapsto & [u]^{d+1} \end{array}$$

$$\text{On sait que } dim_K \frac{K[X,Y]_d}{(F,G)\cap K[X,Y]_d} = dim_K\ \Gamma_d = m.n$$

Comme la dimension de Γ_d est indépendant de d, $\Gamma_{d+1} = \frac{K[X,Y]_{d+1}}{(F,G)\cap K[X,Y]_{d+1}}$ est aussi de dimension $m.n$.
De plus, si $\Gamma([u]^d) = [0]$ alors on a $[u]^{d+1} = 0$,c'est à dire $u \in (F,G)\cap K[X,Y]_{d+1}$. En particulier, $u \in (F,G)\cap K[X,Y]_d$ d'où $[u]^d = 0$.
Donc γ est évidemment injective.
Et par suite γ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
Or $\frac{K[X,Y]}{(F,G)}$ se décompose en une réunion infinie d'espaces vectoriels de la forme $\frac{K[X,Y]_i}{(F,G)\cap K[X,Y]_i}$
On a donc $\frac{K[X,Y]}{(F,G)} = \cup_i \frac{K[X,Y]_i}{(F,G)\cap K[X,Y]_i}$
avec $dim_K\ \frac{K[X,Y]_i}{(F,G)\cap K[X,Y]_i} = m.n.$
Donc $dim_K\ \frac{K[X,Y]}{(F,G)} = m.n.$

■

Conclusion finale
Nous avons donc ces égalités :

$$\begin{aligned} dim_K K[X,Y]/(F,G) &= \textstyle\sum_{P\in A} I(P, F\cap G) \\ &= dim_K \Gamma_d \\ &= dim_K K[X,Y]_d/(F,G)\cap K[X,Y]_d \\ &= m.n. \end{aligned}$$

Références

[1] B.Stum, Courbes Algébriques 1999, name.math.univ-rennes1.fr/bernard.le-stum

[2] A.Chenciner cours de maitrise : Géométrie Algébrique Elémentaire

[3] A.Chenciner, Courbes Algébriques Planes

[4] M.P.Malliavin, Algèbre commutative : applications en géométrie et théorie des nombres 1985

[5] D.Perrin ; Introduction à la géométrie algébrique.

Table des matières