

Régulateurs des extensions canoniques

Chevaleret, le 9 janvier 2008

Carlos T. Simpson

C.N.R.S., Laboratoire J. A. Dieudonné

Université de Nice-Sophia Antipolis

Travail en commun avec Jaya Iyer. Nous avons commencé à considérer ces questions à partir d'un exposé qu'elle a donné à Nice en 2005

Soit X une variété projective lisse sur \mathbb{C} ,
 $D = D_1 + \dots + D_k$ un diviseur à croisements normaux strictes (avec des composantes lisses).
Posons $U := X - D$.

Soit (E, ∇) un fibré vectoriel plat sur U . Les classes de Chern de E en \mathbb{Q} -cohomologie sont zéro.

Il n'est pas toujours vrai que $c_i(E) = 0$ dans $CH^i(X) \otimes \mathbb{Q}$: l'exemple primordial est celui des fibrés en droites plats sur une variété abélienne. On a la

Conjecture d'Esnault: si $f : Y \rightarrow U$ est une famille lisse, alors les classes de Chern du fibré plat sous-jacent à $R^i f_* \mathbb{Q}$ s'annulent dans les groupes de Chow rationnels.

Rappelons que le fibré E admet une *extension canonique de Deligne*, un fibré \overline{E} sur X .

Dorenavant, on supposera que les monodromies autour des D_i sont unipotents.

Dans ce cas, \overline{E} est l'unique extension de E en un fibré vectoriel telle que la connexion induite ∇ est logarithmique avec des résidus nilpotents.

Dans le cas des monodromies quasi-unipotents on pourrait considérer une extension canonique dans la catégorie des fibrés paraboliques.

La conjecture d'Esnault sur l'extension canonique: si (E, ∇) provient d'une famille sur U , alors les classes de Chern de \overline{E} sont zéro dans les groupes de Chow rationnels.

La cohomologie de Deligne fournit un étape intermédiaire entre la cohomologie de Betti, et les groupes de Chow:

$$CH^p(X) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow H_D^{2p}(X, \mathbb{Q}(p)) \rightarrow H^{2p}(X, \mathbb{Q}).$$

Théorème (Reznikov) *Si E est un fibré plat sur U , alors pour tout $p > 1$ on a $c_p^D(E) = 0$ dans $H_D^{2p}(U, \mathbb{Q}(p))$.*

Il avait abordé en premier le cas $U = X$, $D = \emptyset$ mais plus récemment le cas de U ouvert.

Nous nous sommes posés la question de prouver ce résultat pour l'extension canonique \overline{E} sur X .

On n'a pu traiter jusque-là que le cas où D est lisse—hypothèse dorenavant en vigueur.

Régulateurs de Chern-Simons: On dispose de classes

$$\hat{c}_p(E, \nabla) \in H^{2p-1}(U, \mathbb{C}/\mathbb{Z})$$

relévant les classes de Chern-Deligne.

Reznikov prouve que ces classes sont de torsion.

Le plus grand problème pour traiter \bar{E} est de définir des régulateurs de Chern-Simons sur X

$$\hat{c}_p(\bar{E}, \nabla) \in H^{2p-1}(X, \mathbb{C}/\mathbb{Z}),$$

qui devraient encore relever les $c_p^{\mathcal{D}}(\bar{E})$.

On aurait besoin de l'invariance de ces classes en cas de déformation du fibré plat, afin de pouvoir appliquer le résultat de déformation vers une VSH.

La preuve de Reznikov utilise aussi de façon très astucieuse l'existence d'une formulation des régulateurs en K -théorie.

Pour définir $\hat{c}_p(\bar{E}, \nabla)$ on fait appel au groupe des **caractères différentiels** de degré k qui rentre dans une suite exacte

$$0 \rightarrow H^{k-1}(X, \mathbb{C}/\mathbb{Z}) \rightarrow \hat{H}^k(X, \mathbb{C}/\mathbb{Z}) \rightarrow A_f^k(X, \mathbb{Z}) \rightarrow 0,$$

où $A_f^k(X, \mathbb{Z})$ consiste des k -formes fermées qui représentent des classes de cohomologie à coefficients dans \mathbb{Z} .

La définition est la suivante:

$$\hat{H}^k(X, \mathbb{C}/\mathbb{Z}) :=$$

$$\{(f, \alpha) : \forall \eta \ f(\partial\eta) = \int_{\eta} \alpha \pmod{\mathbb{Z}}, \ d\alpha = 0\},$$

$$f \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(Z_{k-1}(X), \mathbb{C}/\mathbb{Z}), \ \eta \in Z_k(X), \ \alpha \in A^k(X).$$

Cheeger-Simons: si (E, d) est un fibré C^∞ avec connexion sur X , alors on obtient la *forme de Cheeger-Simons* $\hat{c}_p(E, d)$ à valeurs dans le groupe des caractères différentiels $\widehat{H}^{2p}(X, \mathbb{C}/\mathbb{Z})$. Dans la suite exacte, cette forme se projette vers la forme de Chern de la connexion d .

Il est hyper bien connu que si la connexion est plate, on obtient la *classe de Chern-Simons* dans le noyau $H^{2p-1}(X, \mathbb{C}/\mathbb{Z})$.

Or, comme il a été observé déjà dans (Cheeger-Simons 1985), Corollary 2.4: même si (E, d) a courbure non-nulle, mais de façon à ce que les formes de Chern de la courbure s'annulent partout, on récupère encore une classe de Chern-Simons dans $H^{2p-1}(X, \mathbb{C}/\mathbb{Z})$.

Ceci est l'observation-clef que nous utiliserons.

Quand on parle des “formes de Chern” il est souvent plus facile de travailler avec la partie de degré p du caractère de Chern, qu’on notera ch_p mais qui est souvent aussi appelé “classe de Newton” .

On a

$$ch_p(E, d) = Tr(F \wedge \cdots \wedge F).$$

La forme de Chern $c_p(E, d)$ est la combinaison de $ch_p(E, d)$ avec des termes polynômes de degré > 1 en les $ch_i(E, d)$ pour $i < p$.

Le produit dans l’anneau des caractères différentiels—tout comme dans la cohomologie de Deligne—est “unipotent”. En particulier, pour des objets qui se projettent vers 0 dans les formes différentiels, le produit s’annule et on n’a pas besoin de distinguer ch_p de c_p .

Maintenant, supposons localement sur X que le fibré E est muni d'une filtration par sous-fibrés strictes, telle que d préserve la filtration et induit une connexion plate sur le gradué associé.

Dans ce cas, la courbure F est strictement triangulaire supérieure, et ses formes de Chern $Tr(F \wedge \cdots \wedge F)$ s'annulent.

Ces filtrations définies localement sur des ouverts de X n'ont pas besoin de compatibilité mutuelle.

On dira dans cette situation que d est *localement nil-plate*.

Considérons notre situation géométrique $D \subset X$, $U = X - D$. Pour la construction des classes, on pourrait envisager X compacte \mathcal{C}^∞ et D un diviseur lisse de codimension réelle 2.

Soit N un voisinage tubulaire de D et $N^* := N - D$.

Soit $S = \partial N$, on a $N^* \cong S \times (0, 1)$.

Soit (E, ∇) un fibré plat sur U avec monodromie unipotente autour de D . On peut alors choisir une filtration $\{F_i\}$ de E_{N^*} et une extension de gr^F en fibré plat sur N , qu'on notera par abus $(gr_N^F, gr \nabla)$.

Par exemple, on pourrait utiliser la filtration par les noyaux, ou celle par les conoyaux, ou encore la *filtration par le poids de la monodromie* (chère aux théoriciens de Hodge). Peu importe!

On choisit ensuite un scindage \mathcal{C}^∞ de la filtration au-dessus de N^* ,

$$E|_{N^*} \cong (gr_N^F)|_{N^*}.$$

Ceci permet de recoller les fibrés E sur U avec gr_N^F sur N . On obtient ainsi une construction géométrique d'un fibré \overline{E} sur X .

C'est la version \mathcal{C}^∞ de l'extension canonique de Deligne.

Dans la situation algebro-géométrique le fibré \overline{E} construit par recollement coincide avec le fibré \mathcal{C}^∞ sous-jacent à l'extension canonique de Deligne, et en plus la filtration sur N est holomorphe.

Au-dessus de N^* on a deux connexions: la restriction de la connexion ∇ d'origine sur U , et la restriction du gradué-associé $gr\nabla$ sur N .

En utilisant la décomposition $N^* \cong S \times (0, 1)$ on peut prendre la moyenne des deux connexions avec une partition d'unité, ce qui donne une connexion C^∞ notée d sur \overline{E} .

En dehors de N , la connexion d coïncide avec ∇ . Au-dessus de N , la connexion d respecte quand-même la filtration, et induit la connexion plate $gr\nabla$ sur le gradué associé.

Donc d est localement nil-plate et définit une classe de Chern-Simons $\hat{c}_p(\overline{E})$.

Théorème *La classe $\hat{c}_p(\overline{E}) \in H^{2p-1}(X, \mathbb{C}/\mathbb{Z})$ est bien-définie, functorielle, invariante sous déformation, et dans la situation algebrogéométrique elle relève la classe $c_p^{\mathcal{D}}(\overline{E})$ de Deligne-Chern.*

La formule pour la variation de la classe de Cheeger-Simons dans les caractères différentiels

$$\delta \widehat{c}_p(E, d_t) = \text{Tr}(\delta(d_t) \wedge F_t \wedge \cdots \wedge F_t)$$

sert à montrer que la classe est bien définie indépendamment du choix des filtrations et du scindage, et à prouver l'invariance sous déformation.

La technique de Dupont-Hain-Zucker marche de la même façon pour prouver la compatibilité avec la classe de Deligne-Chern.

Pour prouver dans le cas algébrique que ces classes sont de torsion, nous aurons besoin d'une interprétation différente en termes de K -théorie.

Rappelons le **théorème des déformations** en K -théorie: pour tout anneau raisonnable A (e.g. un corps),

$$K_i(A) \cong K_i(A[t]).$$

En termes topologiques, ceci veut dire que les applications d'anneaux

$$A \rightarrow A[t] \xrightarrow{ev_0, ev_1} A$$

induisent des équivalences d'homotopie

$$BGL(A)^+ \xrightarrow{\sim} BGL(A[t])^+ \xrightarrow{\sim} BGL(A)^+.$$

On définit *l'espace de K -théorie des déformations* comme le coproduit homotopique des deux applications d'évaluation

$$\begin{array}{ccc} BGL(A[t])^+ & \rightarrow & BGL(A)^+ \\ \downarrow & & \downarrow \\ BGL(A)^+ & \rightarrow & BGL(A)_{\text{def}}^+ \end{array}$$

On a

$$BGL(A)^+ \xrightarrow{\sim} BGL(A)_{\text{def}}^+.$$

Le coproduit homotopique $BGL(A)_{\text{def}}^+$, colimite du diagramme d'espaces

$$\begin{array}{ccc}
 BGL(A[t])^+ & & BGL(A[t])^+ \\
 \swarrow & & \searrow \\
 BGL(A)^+ & BGL(A[t])^+ \times [0,1] & BGL(A)^+
 \end{array}$$

est l'espace naturel qui reçoit un morphisme classifiant pour les situations comme la notre:

$$X = U \cup N, \quad U \cap N = N^*, \quad N^* \cong S \times (0, 1).$$

Etant donnés des systèmes locaux en A -modules localement libres au-dessus de U et N , connexes par une déformation au-dessus de $N^* \sim S$, on obtient une application classifiante pour le recollement par déformations

$$X \rightarrow BGL(A)_{\text{def}}^+$$

homotopiquement unique.

L'équivalence avec $BGL(A)^+$ signifie que pour tout groupe de coefficients comme \mathbb{C}/\mathbb{Z} on a

$$H^k(BGL(A)_{\text{def}}^+, \mathbb{C}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H^k(BGL(A)^+, \mathbb{C}/\mathbb{Z}).$$

En particulier, la classe universelle de Chern-Simons induit une classe universelle “de Chern-Simons deformation-théorique”

$$\tau_{2p-1} \in H^{2p-1}(BGL(\mathbb{C})_{\text{def}}^+, \mathbb{C}/\mathbb{Z}).$$

Pour $\sigma : A \hookrightarrow \mathbb{C}$ on obtient le remonté en arrière

$$\sigma^* \tau_{2p-1} \in H^{2p-1}(BGL(A)_{\text{def}}^+, \mathbb{C}/\mathbb{Z}),$$

qui à son tour induit, via le classifiant de la situation de recollement par déformations, une classe dans $H^{2p-1}(X, \mathbb{C}/\mathbb{Z})$.

Soit ρ une représentation de $\pi_1(U)$ à coefficients dans un sous-corps $\sigma : F \hookrightarrow \mathbb{C}$, avec monodromie unipotent autour de D . On a l'application classifiante $\xi : X \rightarrow BGL(F)_{\text{def}}^+$ correspondant à la déformation habituelle de $\rho|_{N^*}$ vers son gradué associé gr_N^F .

Lemme *La classe $\xi^* \sigma^* \tau_{2p-1}$ coïncide avec le régulateur de Chern-Simons défini auparavant.*

Pour la preuve de ce lemme: dans toute situation de recollement par déformations sur $(U, N, N^* = S \times (0, 1))$, on peut définir une connexion “recollée” dont la courbure s’annule sur les tranches $S \times \{u\} \subset N^*$. Donc les formes de Chern s’annulent pour $p > 1$, et on obtient des classes de Chern-Simons.

On prouve d’abord que ces classes coïncident avec les $\xi^* \sigma^* \tau_{2p-1}$, en s’appuyant sur le fait que le morphisme de connexion est zéro dans la suite de Mayer-Vietoris pour la situation universelle (diagramme d’il y a 2 diapos).

Ensuite on remarque que pour une déformation qui provient d’une filtration, cette connexion “recollée” à partir des données de déformation est compatible avec la filtration et la connexion plate sur gr_N^F . Donc, leurs classes de Chern-Simons s’accordent.

On peut imiter ces constructions dans la K -théorie hermitienne de Karoubi où l'on dispose aussi d'un "théorème de déformations".

Lemme *Si ρ prend valeurs dans un groupe de la forme $U(p, q)$, alors le régulateur de volume de Borel, partie imaginaire de la classe de Chern-Simons, s'annule sur X .*

La raison essentielle, comme c'est remarqué dans le papier de Reznikov, est l'annulation des espaces de formes invariantes de dimension impaire sur $U(p, q)$. Pour transposer ce fait dans notre situation, on définit—encore par coproduit homotopique—une version "déformations" du groupe unitaire infini $BU(\infty, \infty)_{\text{def}}^+$ et on applique le théorème de déformations hermitien de Karoubi.

Biquard et Mochizuki ont étendu la théorie des fibrés harmoniques au cas des variétés ouvertes.

Théorème (Biquard, Mochizuki) *Soit (E, ∇) un fibré plat sur U , alors (E, ∇) se déforme en une $\mathbb{C}VSH$. La déformation tient constante le polynôme caractéristique de la monodromie autour de D .*

Corollaire *Si (E, ∇) est un fibré plat sur U avec monodromie unipotente autour de D , alors le régulateur de volume de Borel étendu en X , partie imaginaire de notre régulateur de Chern-Simons $\hat{c}_p(\bar{E}, \nabla)$, s'annule.*

Le régulateur de Chern-Simons étant invariant par déformations, on peut supposer que ρ est une $\mathbb{C}VSH$. Dans ce cas, la monodromie est contenue dans $SU(p, q)$. Par le lemme du diapo précédent, le régulateur de volume s'annule.

Théorème principal

Théorème *Soit X une variété algébrique avec diviseur lisse $D \subset X$, et posons $U := X - D$. Soit (E, ∇) un fibré plat sur U avec monodromie unipotente autour de D . Le régulateur de Chern-Simons pour l'extension canonique $\hat{c}_p(\bar{E}) \in H^{2p-1}(X, \mathbb{C}/\mathbb{Z})$ défini ci-dessus, est de torsion.*

Corollaire *Par conséquent, la classe de Deligne-Chern $c_p^{\mathcal{D}}(\bar{E})$ de l'extension canonique \bar{E} de E en un fibré sur X , est de torsion.*

D'après ce que j'ai compris des conjectures en K -théorie (c'est-à-dire très peu!), si l'on suppose la conjecture de Beilinson et si X et D sont définis sur $\bar{\mathbb{Q}}$, le corollaire ci-dessus devrait impliquer la conjecture d'Esnault sur l'extension canonique dans ce cas (?).

Preuve du théorème:

On copie directement la preuve de Reznikov. Ceci comporte des idées très subtiles et astucieuses, on rappelle donc l'argument.

Par l'invariance sous déformation, on peut supposer que la représentation de monodromie ρ de (E, ∇) est définie sur un corps de nombres algébrique F , autrement dit ρ est obtenu par extension de scalaires à partir de

$$\rho_F : \pi_1(U) \rightarrow GL(r, F).$$

L'application classifiante pour ρ_F , étendue par notre procédé en K -théorie, s'écrit

$$\xi : X \rightarrow BGL(F)_{\text{def}}^+.$$

Pour tout plongement $\sigma : F \rightarrow \mathbb{C}$, on obtient

$$\sigma : BGL(F)_{\text{def}}^+ \rightarrow BGL(\mathbb{C})_{\text{def}}^+.$$

Soit σ_0 le plongement du départ.

On avait la classe tautologique

$$\tau_{2p-1} \in H^{2p-1}(BGL(\mathbb{C})_{\text{def}}^+, \mathbb{C}/\mathbb{Z}).$$

Sa partie imaginaire est le “régulateur de volume de Borel”

$$Vol_{2p-1} := \Im \tau_{2p-1} \in H^{2p-1}(BGL(\mathbb{C})_{\text{def}}^+, \mathbb{R}).$$

On s'intéresse à la classe

$$\hat{c}_p(\bar{E}, \nabla) = \xi^* \sigma_0^*(\tau_{2p-1}).$$

Quelque soit σ , le régulateur de volume étendu de $\sigma \rho_F$ est zéro. C'était le corollaire ci-dessus (utilisant Biquard-Mochizuki, l'invariance par déformations, et la K -théorie hermitienne).

On obtient pour tout σ ,

$$\xi^* \sigma^*(Vol_{2p-1}) = 0.$$

On arrive à la partie mystérieuse: on applique le **théorème de Borel** qui dit que les classes $\sigma^*(Vol_{2p-1})$, pour $p > 1$ et laissant σ parcourir tous les plongements $F \rightarrow \mathbb{C}$, engendrent l'anneau de cohomologie réelle

$$H^*(BGL(F)_{\text{def}}^+, \mathbb{R}).$$

Or, les remontés en arrière par ξ de ces classes s'annulent. Donc ξ^* induit l'application zéro sur la cohomologie à coefficients dans \mathbb{R} . Il en est donc de même pour la cohomologie à coefficients dans \mathbb{Q} .

Le groupe \mathbb{C}/\mathbb{Q} est un \mathbb{Q} -espace vectoriel, et $\sigma_0^* \tau_{2p-1}$ se projette modulo torsion en une classe de $H^{2p-1}(BGL(\mathbb{C})_{\text{def}}^+, \mathbb{C}/\mathbb{Q})$. Le remonté par ξ^* de cette classe est zéro. Donc, dans la cohomologie à coefficients dans \mathbb{C}/\mathbb{Z} la classe $\xi^* \sigma_0^*(\tau_{2p-1})$ était de torsion. C'est la classe originelle $\hat{c}_p(\bar{E}, \nabla)$ dont on s'intéressait, ce qui complète la preuve.

Epilogue

Après notre préprint, Deligne nous a envoyé une suggestion pour clarifier la description et la présentation du régulateur de Chern-Simons étendu. En réalité sa description rend facile l'extension de la définition au cas des croisements normaux.

A ce propos on devrait dire que Deligne nous a beaucoup aidé au niveau philosophique, par exemple en envoyant à Jaya une preuve de la trivialité topologique de l'extension canonique—preuve contenant des idées préfigurant la définition du régulateur.

Indépendamment de la remarque de Deligne, Esnault nous a envoyé cet été une définition du régulateur étendu dans le cas des croisements normaux, utilisant sa théorie des caractères différentiels algébriques. Elle a su faire

marcher avec la géométrie log une approche via la notion de τ -connexion, que nous n'avions pas pu faire non sans l'avoir essayé. D'autre part elle nous a aidé aussi par de nombreux discussions utiles.