Sous-groupes finis de $O(2,\mathbb{R})$ et de $SO(3,\mathbb{R})$

0. Rappels

a) Définition de $O(n,\mathbb{R})$ et de $SO(n,\mathbb{R})$?

b) Nature des éléments de $O(2,\mathbb{R})$, $SO(2,\mathbb{R})$, $O(3,\mathbb{R})$, $SO(3,\mathbb{R})$?

c) Soit $n \geq 3$ un entier. Qu'est-ce qu'un polygone régulier à n côtés ? Quel est son groupe d'isométrie (noté D_{2n}) ? En donner des générateurs.

[N.B : pour $n=1$, on convient que $D_2 = \mathbb{Z}/2$, et pour $n=2$, $D_4 = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$]

d) groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$, groupe alterné $\mathfrak{A}_n$, ...

1. Sous-groupes finis de $SO(2)$ et de $O(2)$.

a) Quels sont les sous-groupes finis de $SO(2)$?

b) Montrer que $O(2) \simeq SO(2) \rtimes \mathbb{Z}/2$. (et que $O(3) \simeq SO(3) \times \mathbb{Z}/2$)

c) Quels sont les sous-groupes finis de $O(2)$?

2 Sous-groupes finis de $SO(3,\mathbb{R})$

Le but est de montrer le théorème suivant :

th : Tout sous-groupe fini $G \subset SO(3,\mathbb{R})$ est de l'un des cinq type suivants :

a) $G \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

b) $G \simeq D_{2n}$ (diédral)

c) $G \simeq \mathfrak{S}_4$

d) $G \simeq \mathfrak{A}_4$

e) $G \simeq \mathfrak{A}_5$

De plus, deux groupes G et G' « du même type » sont conjugués dans $SO(3)$.

On se donne donc un sous-groupe fini $G \subset SO(3)$.
On suppose $G \neq \{e\}$.

Soit S^2 la sphère unité de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$.

a) Justifier que G agit sur S^2. (par restriction)
Si $g \neq e$ est un élément de G, quels sont ses points fixes ?

On note X l'ensemble des éléments de S^2 qui sont laissés fixes par un élément non trivial de G,
et $E = \{ (g, x) \in (G - \{e\}) \times X, \ g \cdot x = x \}$.

b) Justifier que X et E sont finis.
Justifier que G opère sur X. Quelle est la nature du stabilisateur d'un pt $x \in X$
On note $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$ les orbites de cette action, $\nu_1, \ldots, \nu_k$ les ordres des stabilisateurs associés.
Quitte à renuméroter, on peut supposer :

$$\nu_1 \leq \nu_2 \leq \cdots \leq \nu_k .$$

c) En comptant $\#E$ de deux façons différentes, montrer que l'on a

$$2 - \frac{2}{|G|} = \sum_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{\nu_i}\right)$$

d) En déduire que $2 \leq k \leq 3$.

(3)

1er cas : on suppose $k = 2$. Montrer qu'alors $\nu_1 = \nu_2 = |G|$.
Que sont les orbites Ω_1 et Ω_2 ? En déduire la nature du groupe G (Synthèse !)

On suppose désormais $k = 3$.
2) Montrer que $\nu_1 = 2$, puis que $2 \leq \nu_2 \leq 3$.

2ème cas : On suppose $\nu_2 = 2$. Montrer qu'alors $|G| = 2\nu_3$.
Montrer que Ω_3 est constituée de 2 points diamétralement opposés et que Ω_1 et Ω_2 forment deux polygones réguliers à n côtés dans le plan orthogonal à ce diamètre.
En déduire la nature de G. (Synthèse !)

On suppose désormais $\nu_2 = 3$. Montrer que $3 \leq \nu_3 \leq 5$.

3ème cas : Si $\nu_3 = 3$, montrer que $|G| = 12$.
En faisant agir G sur Ω_2, construire un morphisme de groupes
$$G \hookrightarrow \mathfrak{S}_4 \text{ injectif.}$$
En déduire que $G \simeq \mathfrak{A}_4$.
[Quelle est la nature du polyèdre (justifier) formé par les points de Ω_1 ? de Ω_2 ?]

4ème cas : si $\nu_3 = 4$, montrer que $|G| = 24$.
Montrer que Ω_2 a 8 points, regroupés en 4 paires de points diamétralement opposés.
En déduire que $G \simeq \mathfrak{S}_4$.

[Quel est le polyèdre dont les sommets sont les points (4)
de Ω_2 ? de Ω_3 ?]

<u>5ème cas</u> : $\nu_3 = 5$. Montrer que $|G| = 60$.

Montrer que G a exactement 15 éléments d'ordre 2, ~~20~~
20 éléments d'ordre 3
24 éléments d'ordre 5.

et on admettra le lemme suivant :

<u>Lemme</u> : Parmi les groupes d'ordre 60, ~~a~~ $\mathfrak{S}_5$ est le seul à avoir 15 éléments d'ordre 2, 20 d'ordre 3 et 24 d'ordre 5.

[Quelle est la nature du polyèdre formé par les points de Ω_2 ? et Ω_3 ?].

<u>Compléments</u> :

1) Unicité des polyèdres (Platon !).
Réciproquement, en utilisant ce théorème, on pourrait montrer qu'il n'existe que 5 polyèdres réguliers (notion qu'il faudrait définir).

2) Sous-groupes finis de $O(3,\mathbb{R})$.
On montre que les sous-groupes finis de $O(3)$ sont de la forme
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2$, D_{2n}, $D_{2n} \times \mathbb{Z}/2$, $\mathfrak{a}_4$, $\mathfrak{S}_4$, $\mathfrak{a}_4 \times \mathbb{Z}/2$, $\mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2$
$\mathfrak{a}_5$, $\mathfrak{a}_5 \times \mathbb{Z}/2$

Attention : deux groupes du même type ne sont plus nécessairement conjugués !

3) Sous-groupes finis de $GL(3,\mathbb{R})$.

<u>Lemme de Maschke</u> (cf. représentations linéaires) : Tout sous-groupe fini de $GL(3)$ est conjugué à un sous-groupe de $O(3)$.