Feuille d'exercices n^{o}5

1. Diagonaliser chacune des matrices symétriques suivantes dans une base orthonormée du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ resp. de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$
$$C_4 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

2. Soit $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique et $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit $A = (a_{ij})$ la matrice symétrique définie par $a_{ij} = \phi(e_i, e_j)$.

2.a. Montrer que pour $v, w \in E$ on a

$$^t vAw = \sum_{i,j=1}^{n} v_i a_{ij} w_j = \phi(v, w).$$

2.b. Montrer que $\Phi : E \to E^* : v \mapsto \phi(v, -)$ est une forme linéaire représentée par le vecteur-ligne $^t vA$.

2.c. Quel est le noyau de Φ ? Montrer les équivalences suivantes :

$$\phi \text{ non dégénérée } \Leftrightarrow \Phi \text{ injective (et donc bijective)} \Leftrightarrow A \text{ de rang } n$$

3. Pour $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ on définit les trois formes quadratiques :

$$q_1(v) = x^2 + xy - y^2 + z^2, \quad q_2(v) = xy + 3yz - z^2, \quad q_3(v) = xy + yz + zx.$$

3.a. Indiquer les matrices symétriques A_1, A_2, A_3 correspondant à q_1, q_2, q_3 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

3.b. Décomposer q_1, q_2, q_3 en somme de carrés indépendants et en déduire la signature de q_1, q_2, q_3.

3.c. Indiquer des changements de base $^t PA_iP$ qui diagonalisent A_i.

4. On considère sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ la forme quadratique

$$q(v) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz \quad \text{pour} \quad v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

4.a. Expliciter $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $q(v) = {}^t vAv$ pour $v \in \mathbb{R}^3$.

4.b. Indiquer une matrice orthogonale $P \in O_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale. En déduire la signature de la forme quadratique q.

4.c. Trouver des formes linéaires l_1, l_2, l_3 sur $\mathbb{R}^3$ telles que pour tout $v \in \mathbb{R}^3$, $q(v) = \pm l_1(v)^2 \pm l_2(v)^2 \pm l_3(v)^2$.

5. Montrer que pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice ${}^tAA$ est symétrique à valeurs propres positives. Si A est diagonalisable, quel est le lien entre les valeurs propres de ${}^tAA$ et les valeurs propres de A ?

6. Montrer que toute transformation orthogonale spéciale de $\mathbb{R}^3$ possède une valeur propre réelle. En déduire une forme "canonique" des éléments du groupe $SO_3(\mathbb{R})$. Interprétation géométrique ?

Mots-clés : Forme bilinéaire symétrique, forme quadratique, base orthonormée, matrice symétrique, matrice orthogonale.