

Examen du 4 mars 2014

1 heure 30

La correction tiendra compte de la clarté et de la concision de la rédaction.
L'utilisation de calculatrices et de téléphones portables est interdite.

* *
*

Exercice 1. Question de cours

Soit \mathbf{F}_p le corps à p éléments. On note $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_p)$ le groupe des matrices $n \times n$ inversibles à coefficients dans \mathbf{F}_p . On note $U_n(\mathbf{F}_p)$ le sous-groupe des matrices $A = (a_{i,j})$ telles que $a_{i,j} = 0$ si $i > j$ et $a_{i,i} = 1$ pour tout i .

- Rappeler (sans démonstration) les ordres des groupes $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_p)$ et $U_n(\mathbf{F}_p)$.
- Montrer que $U_n(\mathbf{F}_p)$ est un p -Sylow de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_p)$.
- $U_n(\mathbf{F}_p)$ est-il distingué dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_p)$?

* *
*

Exercice 2. *a)* Donner la décomposition en produit de cycles à supports disjoints de la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_6$ suivante :

i	1	2	3	4	5	6
$\sigma(i)$	5	3	6	4	1	2

- Quel est l'ordre de la permutation σ ? Quelle est sa signature ?
- Montrer que σ est conjugué dans \mathfrak{S}_6 au produit de cycles suivants $\sigma_1 = (1, 2)(3, 4, 5)$ et préciser un $\tau \in \mathfrak{S}_6$ tel que $\tau\sigma_1\tau^{-1} = \sigma$.
- Donner un élément $\sigma_2 \in \mathfrak{S}_6$ ayant le même ordre que σ mais qui n'est pas conjugué à σ .

* *
*

Exercice 3. Soit D_8 le groupe diédral à 8 éléments, c'est-à-dire le sous-groupe de $O(2)$ engendré par la rotation ρ d'angle $\frac{\pi}{2}$ et la symétrie orthogonale σ qui envoie (x, y) sur $(x, -y)$.

- Décrire géométriquement l'élément $\sigma\rho\sigma^{-1}$.
- Soit X l'ensemble des points $\{(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)\}$. Vérifier que pour tout $x \in X$, on a $\rho(x) \in X$ et $\sigma(x) \in X$. On en déduit une action $D_8 \times X \rightarrow X$.
- En identifiant X à l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$, en déduire un morphisme de groupes $\varphi : D_8 \rightarrow \mathfrak{S}_4$. Expliciter $\varphi(\sigma)$ et $\varphi(\rho)$.
- Montrer que φ est *injectif*.
- En déduire que $\varphi(D_8)$ est un 2-Sylow de \mathfrak{S}_4 .