

Feuille d'exercices n°2

TOPOLOGIE DE \mathbb{R}^n , CONTINUITÉ ET DENSITÉ.1. Topologie de \mathbb{R} .1.a. Parmi les quatre parties suivantes de la droite réelle \mathbb{R}

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}}]n, n+1[, \quad \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n}, n > 0 \right\}, \quad [a, \infty[, \quad [a, b] - \left\{ \frac{a+b}{2} \right\}$$

lesquelles sont ouvertes, lesquelles sont fermées, lesquelles ne sont ni ouvertes ni fermées ? Déterminer leur intérieur et leur adhérence.

1.b. Montrer que pour tout point x d'un ouvert U de \mathbb{R} il existe un intervalle $] \alpha, \beta [$ contenant x et contenu dans U . Montrer qu'on peut choisir cet intervalle de sorte que sa longueur $\beta - \alpha$ et son centre $\frac{\alpha + \beta}{2}$ soient rationnels.

1.c. Montrer que \mathbb{R} ne contient qu'un nombre dénombrable d'intervalles ouverts ayant un centre et un rayon rationnels. Dédire de 1.b que tout ouvert de \mathbb{R} est réunion de tels intervalles.

2. Topologie de \mathbb{R}^2 . On considère les parties suivantes de \mathbb{R}^2 :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -x^2 \leq y \leq x^2\}$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = |y|\}$$

$$D = B \setminus A$$

2.a. Déterminer les adhérences $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$. Parmi les parties A, B, C, D lesquelles sont *ouvertes*, lesquelles sont *fermées*. Justifier !

2.b. Déterminer les intérieurs de A, B, C, D .

2.c. La frontière d'une partie P est $Front(P) = \overline{P} \setminus Int(P)$. Dédire de 1.a-b les frontières de A, B, C, D , ainsi que l'intersection des quatre frontières.

2.d. Écrire D comme une réunion de deux parties D_0, D_1 de \mathbb{R}^2 tels que $D_0 \cap D_1 = \emptyset$ et $\overline{D_0} \cap \overline{D_1} = \{(0, 0)\}$.

3. Passage à la frontière. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction continue vérifiant $\gamma(0) = (0, 0)$ et $\gamma(1) = (1, 1)$. Montrer que l'image de γ rencontre le cercle-unité S^1 ainsi que le losange L de sommets $(\pm 1.5, 0), (0, \pm 1.5)$.

4. Graphe d'une fonction continue. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que le graphe de f est un fermé de \mathbb{R}^2 . La réciproque est-elle vraie ? (Considérer la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$).

5. L'ensemble des fonctions continues réelles sur un espace métrique.

5.a. Montrer que l'addition et la multiplication sont des fonctions continues de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .

5.b. Montrer que pour deux fonctions continues $f, g : (E, d) \rightarrow \mathbb{R}$, les applications $x \mapsto f(x) \pm g(x)$ et $x \mapsto f(x)g(x)$ définissent des fonctions continues $f \pm g, f \cdot g : (E, d) \rightarrow \mathbb{R}$. (Autrement dit, l'ensemble des fonctions continues réelles sur un espace métrique forme une \mathbb{R} -algèbre).

5.c. Montrer (en utilisant b) que $\{f \leq g\} = \{x \in E \mid f(x) \leq g(x)\}$ est un fermé de (E, d) resp. $\{f < g\} = \{x \in E \mid f(x) < g(x)\}$ est un ouvert de (E, d) .

5.d. Montrer qu'une application $f = (f_1, \dots, f_n) : (E, d) \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue si et seulement si les n composantes $f_i : (E, d) \rightarrow \mathbb{R}$ le sont.

4. Densité. Soit $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ le cercle-unité qu'on munit de la topologie induite.

5.a. Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ définie par $f(t) = (\cos t, \sin t)$ est continue et surjective.

5.b. Montrer que toute application continue surjective envoie partie dense sur partie dense. En déduire que S^1 possède une partie dénombrable dense.

6. Points isolés. On dit qu'un point $x \in A$ d'un espace topologique E est un *point isolé* de A s'il existe un ouvert U de E tel que $A \cap U = \{x\}$.

6.a. En considérant \mathbb{Z} et \mathbb{Q} comme des parties de \mathbb{R} montrer que tous les points de \mathbb{Z} sont isolés mais qu'aucun point de \mathbb{Q} n'est isolé.

6.b. On pose $\alpha(A) = \overline{\overset{\circ}{A}}$, i.e. $\alpha(A)$ est l'adhérence de l'intérieur de A . Montrer que si A est ouvert (resp. fermé) alors $A \subset \alpha(A)$ (resp. $A \supset \alpha(A)$).

6.c. Soit A une partie de \mathbb{R}^n . Montrer que si $A = \alpha(A)$ alors A est fermé et ne contient aucun point isolé. La réciproque est-elle vraie ?

7. Espaces topologiques séparés. Montrer qu'un espace topologique (E, τ_E) est séparé (i.e. pour tous points distincts $x, y \in E$ il existe des ouverts disjoints U, V tel que $x \in U$ et $y \in V$) si et seulement si la diagonale $\{(x, x) \in E \times E\}$ est fermée dans $E \times E$ pour la topologie-produit.

MOTS-CLÉS: *Topologie de \mathbb{R}^n , continuité, densité, topologie-produit et topologie induite.*