

Théories homogènes et ω -catégories

Clemens BERGER

Université de Nice-Sophia Antipolis, Lab. J.-A. Dieudonné, UMR du CNRS n° 6621, Parc Valrose, F-06108 Nice, Cedex 2, France.

Résumé

Nous introduisons la notion de théorie homogène afin de caractériser les théories issues d'opérades. Il s'ensuit une analogie parfaite entre les E_∞ -espaces de Boardman-Vogt-May [3], [8], et les ω -catégories (faibles) de Batanin [1]. Pour réaliser géométriquement les ω -catégories, nous les relierons aux θ -catégories de Joyal [6] à l'aide d'un nerf cellulaire.

Homogenous theories and ω -categories

We introduce the notion of a homogenous theory so as to characterize operadic theories. This yields a perfect analogy between Boardman-Vogt-May's E_∞ -spaces [3], [8], and Batanin's (weak) ω -categories [1]. In order to realize ω -categories geometrically, we relate them to Joyal's θ -categories [6] by means of a cellular nerve.

1 Introduction

Les ω -catégories ont été définies et étudiées pour la première fois par Street [13]. Récemment, Batanin a développé une approche opéradique qui s'appuie sur la monadicité "globulaire" des ω -catégories strictes. Cette Note propose une notion de *théorie homogène* qui englobe et les opérades de May [8] et les ω -opérades de Batanin [1]. L'idée remonte à Boardman-Vogt [3, II.5] et consiste à plonger l'opérade dans une *catégorie d'opérateurs* de sorte que la *composition d'opérateurs* induise la structure multiplicative de l'opérade. Une algèbre sur l'opérade s'étend alors *canoniquement* en un préfaisceau transformant colimites en limites. Un tel préfaisceau est aussi appelé *modèle de la théorie*.

Une importance capitale incombe à la théorie homogène *terminale* : pour les ensembles, c'est la théorie dont les modèles représentent les *monoïdes abéliens* ; pour les ensembles globulaires, c'est la théorie dont les modèles représentent les *ω -catégories strictes*. La première théorie *contient* la catégorie Γ de Segal [12], la seconde théorie n'est autre que la catégorie Θ de Joyal [6]. En particulier, un monoïde abélien s'identifie à un préfaisceau d'ensembles $X : \Gamma^{op} \rightarrow \text{Ens}$ tel que $X(n) \rightarrow X(1)^n$ soit bijectif pour tout $n \geq 0$, et une ω -catégorie stricte s'identifie à un préfaisceau d'ensembles $X : \Theta^{op} \rightarrow \text{Ens}$ tel que $X(T) \rightarrow \varprojlim_{\mathbb{G} \downarrow T_*} X_-$ soit bijectif pour tout arbre fini à niveaux T .

En considérant des modèles topologiques, il y a deux façons d'assouplir la notion de monoïde abélien : La première, due à Boardman-Vogt et May, aboutit à la notion de *E_∞ -espace* [3], [8], la seconde, due à Segal, aboutit à la notion de *Γ -espace* [12]. Nous allons montrer qu'il est de même possible d'assouplir la notion de ω -catégorie stricte de deux façons : la première donne lieu aux ω -catégories de Batanin [1], la seconde aux θ -catégories de Joyal [6], l'équivalence des deux constituant la base d'une *théorie d'homotopie* satisfaisante.

Dans la suite, nous adopterons les notations et la terminologie du traité [4] de Borceux, à deux exceptions près : la catégorie des algèbres sur la monade A sera notée Alg_A ; les *opérateurs* d'une théorie seront de variance opposée par rapport aux *opérations* induites sur les modèles.

2 Théories algébriques

Définition 2.1. *Une théorie algébrique est une catégorie ayant comme objets les entiers naturels de sorte que la somme s'identifie au coproduit.*

Un modèle de la théorie algébrique \mathbb{T} (ou \mathbb{T} -modèle) est un préfaisceau $X : \mathbb{T}^{op} \rightarrow \text{Ens}$ tel que pour tout $n \geq 0$, l'application $X(n) \rightarrow X(1)^n$, induite par $1 + \dots + 1 \xrightarrow{\sim} n$, soit bijective.

La catégorie des transformations naturelles de \mathbb{T} -modèles est notée $\text{Mod}_{\mathbb{T}}$. Le foncteur oubli $X \mapsto X(1)$ est noté $U_{\mathbb{T}} : \text{Mod}_{\mathbb{T}} \rightarrow \text{Ens}$.

Théorème 2.2. *(Lawvere) Le foncteur oubli $U_{\mathbb{T}}$ admet un adjoint à gauche $F_{\mathbb{T}}$ et induit une équivalence de catégories $\text{Mod}_{\mathbb{T}} \xrightarrow{\sim} \text{Alg}_{U_{\mathbb{T}}F_{\mathbb{T}}}$. La théorie algébrique \mathbb{T} s'identifie à la sous-catégorie pleine de $\text{Mod}_{\mathbb{T}}$ engendrée par les modèles libres $F_{\mathbb{T}}(\underline{n})$ de base $\underline{n} = \{1, \dots, n\}, n \geq 0$.*

Un opérateur $\phi \in \mathbb{T}(m, n) \cong \text{Mod}_{\mathbb{T}}(F_{\mathbb{T}}(\underline{m}), F_{\mathbb{T}}(\underline{n}))$ est dit *ensembliste* (resp. *homogène*) s'il appartient à l'image de $F_{\mathbb{T}}$ (resp. si pour toute factorisation $\phi = F_{\mathbb{T}}(\alpha)\phi'$, α est bijective). Une théorie algébrique \mathbb{T} est dite *homogène* si la monade $U_{\mathbb{T}}F_{\mathbb{T}}$ est fidèle et si l'ensemble \mathbb{T} admet un *système de factorisation* $(\mathbb{T}^h, \mathbb{T}^e)$ décomposant chaque $\phi \in \mathbb{T}$ de manière essentiellement unique en $\phi_e\phi_h$ avec $\phi_h \in \mathbb{T}^h$ homogène et $\phi_e \in \mathbb{T}^e$ ensembliste.

Lemme 2.3. *Les opérateurs homogènes d'une théorie homogène \mathbb{T} satisfont*

$$\mathbb{T}^h(k, n) \cong \coprod_{n=n_1+\dots+n_k} \mathbb{T}^h(1, n_1) \times \dots \times \mathbb{T}^h(1, n_k) \times_{\mathfrak{t}_{n_1} \times \dots \times \mathfrak{t}_{n_k}} \mathfrak{t}_n$$

et permettent de reconstituer toute la théorie algébrique \mathbb{T} , cf. [3, II.2.43].

Proposition 2.4. *Il y a correspondance biunivoque entre théories algébriques homogènes \mathbb{T} et opérades $\mathbb{T}^h(1, n)_{n \geq 0}$ au sens de May.¹*

Corollaire 2.5. *La théorie algébrique \mathbb{T}_{ab} dont les modèles sont les monoïdes abéliens est terminale parmi les théories algébriques homogènes, cf. [3].*

Preuve. Dans un monoïde abélien X , il existe pour tout $n \geq 0$, une et une seule opération homogène n -aire $X^n \rightarrow X : (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 + \dots + x_n$. \square

Un monoïde abélien admet des *espaces classifiants* itérés. Cette propriété est partagée par les E_{∞} -espaces de Boardman-Vogt [3], [11] et de May [8] ainsi que par les Γ -espaces de Segal [12].

¹Boardman et Vogt [3] utilisent le terme *catégorie d'opérateurs en forme standard* pour désigner une théorie algébrique homogène. May [8] introduit plus tard le terme *opérade* pour désigner l'ensemble des opérations n -aires homogènes d'une théorie algébrique homogène.

Un E_∞ -espace est un modèle d'une théorie topologique homogène $\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}_{ab}$ ayant des *fibres contractiles* au-dessus de la partie homogène \mathbb{T}_{ab}^h .

La catégorie Γ est la sous-catégorie de \mathbb{T}_{ab} engendrée par les opérateurs homogènes et les opérateurs ensemblistes *injectif* s ; un Γ -espace est alors un préfaisceau $X : \Gamma^{op} \rightarrow \text{Top}$ dont les applications structurales $X(n) \rightarrow X(1)^n$ sont des équivalences d'homotopie. La comparaison entre Γ -espaces et E_∞ -espaces est faite par Segal [12], May-Thomason [9] et Schwänzl-Vogt [11].

3 Théories globulaires

Nous rappelons qu'un *ensemble globulaire* X est un ensemble gradué $(X_n)_{n \geq 0}$ muni d'applications *source/but* $s_n, t_n : X_{n+1} \rightarrow X_n$ tels que $s_n s_{n+1} = s_n t_{n+1}$ et $t_n s_{n+1} = t_n t_{n+1}$, $n \geq 0$.

Nous considérons X comme un préfaisceau $X : \mathbb{G}^{op} \rightarrow \text{Ens}$ pour la catégorie d'opérateurs \mathbb{G} évidente. Le *plongement de Yoneda* identifie \mathbb{G} à la sous-catégorie pleine de $\text{Ens}^{\mathbb{G}^{op}}$ engendrée par les foncteurs représentables $\mathbb{G}(-, n)$.

A tout *arbre (planaire) fini à niveaux* T est associé l'ensemble globulaire T_* constitué des T -secteurs, cf. [1, p. 61], [2].

L'arbre linéaire de hauteur n est noté $\{n\}$ et satisfait $\{n\}_* \cong \mathbb{G}(-, n)$, d'où l'isomorphisme $T_* \cong \varinjlim_{\mathbb{G} \downarrow T_*} \{-\}_*$ par densité de \mathbb{G} dans $\text{Ens}^{\mathbb{G}^{op}}$.

Pour un arbre fini à niveaux T et un ensemble globulaire X , la *puissance* T^{eme} de X est l'ensemble $X^T = \text{Hom}_{\mathbb{G}}(T_*, X) \cong \varprojlim_{\mathbb{G} \downarrow T_*} X_-$.

Définition 3.1. *A toute monade $A : \text{Ens}^{\mathbb{G}^{op}} \rightarrow \text{Ens}^{\mathbb{G}^{op}}$ est associée la catégorie Θ_A ayant comme objets les arbres finis à niveaux et ayant comme morphismes*

$$\Theta_A(S, T) = \text{Alg}_A(A(S_*), A(T_*)).$$

La catégorie Θ_A est une théorie globulaire, si le foncteur nerf

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_A : \text{Alg}_A &\rightarrow \text{Ens}^{\Theta_A^{op}} \\ X &\mapsto \text{Alg}_A(-, X) \end{aligned}$$

induit une équivalence de catégories $\text{Alg}_A \xrightarrow{\sim} \text{Mod}_{\Theta_A}$, où par Θ_A -modèle nous entendons un préfaisceau $X : \Theta_A^{op} \rightarrow \text{Ens}$ dont les applications structurales

$$\alpha_T : X(T) \rightarrow X^T := \varprojlim_{\mathbb{G} \downarrow T_*} X(\{-\})$$

sont bijectives pour tout arbre fini à niveaux T .

Le foncteur oubli $X \mapsto X(\{-\})$ est noté $U_A : \text{Mod}_{\Theta_A} \rightarrow \text{Ens}^{\mathbb{G}^{op}}$.

Lemme 3.2. *Pour une théorie globulaire Θ_A , le foncteur oubli U_A admet un adjoint à gauche F_A tel que $A = U_A F_A$, et induit une équivalence de catégories $\text{Mod}_{\Theta_A} \xrightarrow{\sim} \text{Alg}_A$ quasi-inverse au nerf \mathcal{N}_A .*

Une théorie globulaire Θ_A est dite *homogène* si la monade A est fidèle et si Θ_A admet un système de factorisation (Θ_A^h, Θ_A^e) comme au chapitre précédent.

Lemme 3.3. *Les opérateurs homogènes d’une théorie homogène Θ_A satisfont*

$$\Theta_A^h(S, T) \cong \coprod_{T_* \xrightarrow{\text{G}\downarrow S_*} (T_i)_*} \varprojlim_{\text{G}\downarrow S_*} \Theta_A^h(\{n_i\}, T_i)$$

et permettent de reconstituer toute la théorie globulaire Θ_A .

Proposition 3.4. *Il y a correspondance biunivoque entre théories globulaires homogènes Θ_A et ω -opéradés $\Theta_A^h(\{n\}, T)_{T, n \geq ht(T)}$ au sens de Batanin.*

Corollaire 3.5. *La théorie globulaire dont les modèles sont les ω -catégories strictes est terminale parmi les théories globulaires homogènes. Elle s’identifie à la catégorie Θ des opérateurs cellulaires de Joyal.*

Preuve. Dans une ω -catégorie stricte X , il existe pour tout arbre fini à niveaux T et tout $n \geq ht(T)$, une et une seule opération homogène T -aire $X^T \rightarrow X_n$, donnée par recollement (“pasting”) suivi d’identités. \square

4 Catégories d’ordre supérieur

Théorème 4.1. *La catégorie des ω -catégories strictes est une sous-catégorie réflexive et cartésienement close de la catégorie des ensembles cellulaires.*

L’inclusion est donnée par le “nerf de Joyal” $\mathcal{N}_\Theta : \omega\text{-Cat}_{str} \xrightarrow{\sim} \text{Mod}_\Theta \hookrightarrow \text{Ens}^{\Theta^{op}}$, cf. [6], [2]. Un théorème analogue est vrai pour les n -catégories strictes en se restreignant à la sous-catégorie pleine $\Theta^{(n)}$ de Θ engendrée par les arbres finis à *au plus n niveaux*. Pour $n = 1$, comme $\Theta^{(1)} \cong \mathbb{Z}$, nous retrouvons la description de Grothendieck-Segal des 1-catégories : $\mathcal{N}_{\mathbb{Z}} : \text{Cat} \xrightarrow{\sim} \text{Mod}_{\mathbb{Z}} \hookrightarrow \text{Ens}^{\mathbb{Z}^{op}}$. Un ensemble simplicial $X : \mathbb{Z}^{op} \rightarrow \text{Ens}$ est le nerf d’une 1-catégorie si et seulement si les applications structurales $\alpha_{[n]} : X([n]) \rightarrow X_1 \times_0 \cdots \times_0 X_1$ sont bijectives.

Définition 4.2. *Une théorie globulaire Θ_A est contractile si elle est homogène et si pour tous $\phi, \psi \in \Theta_A^h(\{n\}, T)$ tels que $(\phi s)_h = (\psi s)_h$ et $(\phi t)_h = (\psi t)_h$, il existe $\chi \in \Theta_A^h(\{n+1\}, T)$ tel que $\chi s = \phi$ et $\chi t = \psi$.*

Définition 4.3. *Une ω -catégorie est un modèle d’une théorie globulaire contractile, cf. [1]. Une θ -catégorie est un ensemble cellulaire $X : \Theta^{op} \rightarrow \text{Ens}$ dont les applications structurales $\alpha_T : X(T) \rightarrow X^T$ sont surjectives, cf. [6].*

Théorème 4.4. *Il existe deux adjonctions $\omega\text{-Cat} \xrightleftharpoons[\mathcal{N}]{\omega} \theta\text{-Cat} \xrightleftharpoons[\text{Cell}]{|-|} \text{Top}$ induisant des équivalences de Quillen $\mathbf{Ho}(\omega\text{-Cat}) \sim \mathbf{Ho}(\theta\text{-Cat}) \sim \mathbf{Ho}(\text{Top})$ pour des structures de catégories de modèles fermées convenables.*

Esquisse de preuve. Le nerf cellulaire d’une ω -catégorie $X : \Theta_A^{op} \rightarrow \text{Ens}$ s’obtient par extension “homotopique” de Kan à droite (cf. [5, 5.2]) lelong l’unique foncteur de théories homogènes $\Theta_A \rightarrow \Theta$. La réalisation géométrique d’une

θ -catégorie repose sur le fait que les ensembles cellulaires forment le *topos classifiant* des “ ω -disques” et que la suite des boules-unités $B^n, n \geq 0$, est un ω -disque dans Top, cf. [6]. L’existence d’une structure de modèles sur θ -Cat (i.e. la clôture par équivalences faibles de la catégorie des θ -catégories) découle de ce que les θ -catégories comprennent à la fois les foncteurs représentables $\Theta(-, T)$ et les “complexes cellulaires totaux”. \square

Références

- [1] Batanin M.A., *Monoidal globular categories as natural environment for the theory of weak n -category*, Adv. in Math. **136** (1998), p. 39-103.
- [2] Batanin M.A., Street R., *The universal property of the multitude of trees*, preprint (1997).
- [3] Boardman J. M., Vogt R. M., *Homotopy-everything H -spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **74** (1968), p. 1117-1122; *Homotopy invariant algebraic structures on topological spaces*, Lect. Notes Math. **347** (1973).
- [4] Borceux F., *Handbook of categorical algebra I-III*, Encyclopedia of Math. 50-52, Cambridge University Press (1994).
- [5] Hollender J., Vogt R. M., *Modules of topological spaces, applications to homotopy limits and E_∞ -structures*, Arch. Math. **59** (1992), p. 115-129.
- [6] Joyal A., *Disks, duality and θ -categories*, preprint (1997).
- [7] Lawvere F. W., *Functional semantics of algebraic theories*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **50** (1963), p. 869-872.
- [8] May J. P., *The Geometry of iterated loop spaces*, Lect. Notes Math. **271** (1972).
- [9] May J. P., Thomason R., *On the uniqueness of infinite loop space machines*, Topology **17** (1978), p. 205-224.
- [10] Quillen D. G., *Rational homotopy theory*, Ann. of Math. **90** (1969), p. 205-295.
- [11] Schwänzl R., Vogt R. M., *E_∞ -spaces and injective Γ -spaces*, Manuscripta Math. **61** (1988), p. 203-214.
- [12] Segal G., *Categories and cohomology theories*, Topology **13** (1974), p. 293-312.
- [13] Street R., *The algebra of oriented simplices*, J. Pure Appl. Alg. **49** (1987), p. 283-335.