Partiel du 6 Novembre 2014.

Durée : 1h 30.

Les documents, calculatrices, téléphones et appareils électroniques ne sont pas autorisés.
Le sujet est composé de 4 exercices.

Exercice 1. *Questions de cours.*
Donner les énoncés des résultats ou les définitions suivants. On ne demande pas les démonstrations.

a) Donner la définition de suite convergente.
b) Enoncer le théorème de convergence pour les suites monotones.
c) Donner la définition de suites adjacentes.
d) Donner un résultat de convergence relatif aux suites adjacentes.

Exercice 2. *Un peu d'arithmétique.* Les questions **1)**, **2)** et **3)** sont totalement indépendantes.

1) On veut démontrer par l'absurde que $\sqrt[3]{2}$ est irrationnel. On suppose donc qu'il existe des entiers a et b supérieurs à 1 tels que $a \wedge b = 1$ et $\sqrt[3]{2} = a/b$. Raisonner comme en Td pour aboutir à une contradiction.

2) Soient a, b, c trois entiers relatifs. On rappelle l'égalité $\text{pgcd}(ac, bc) = |c| \times \text{pgcd}(a, b)$. Démontrer que si $a|bc$ et si $\text{pgcd}(a, b) = 1$ alors $a|c$.

3) *a)* Donner l'énoncé du lemme d'Euclide.
b) Prouver par récurrence l'énoncé suivant, qui a été vu en cours mais non démontré : *soit p un nombre premier et a_1, ... , a_m des entiers relatifs. Si p divise le produit $a_1 a_2 \cdots a_m$, alors p divise a_1, ou p divise a_2, ... , ou p divise a_m.*

Exercice 3. *Avec des* pgcd *et des* ppcm.

1) *a)* Soit p_1, ... , p_r des premiers deux à deux distincts. On se donne α_1, ... , α_r et β_1, ... , β_r des entiers naturels. Montrer que $\text{pgcd}\left(\prod_{j=1}^{r} p_j^{\alpha_j}, \prod_{j=1}^{r} p_j^{\beta_j}\right)$ divise $\text{ppcm}\left(\prod_{j=1}^{r} p_j^{\alpha_j}, \prod_{j=1}^{r} p_j^{\beta_j}\right)$.
b) Peut-il exister un couple d'entiers relatifs (a, b) vérifiant le système $\begin{cases} \text{pgcd}(a, b) = 9 \\ \text{ppcm}(a, b) = 116 \end{cases}$?

2) Soit a et b deux entiers strictement positifs tels que $\text{pgcd}(a, b) = 9$ et $\text{ppcm}(a, b) = 117$.
a) Montrer que 9 divise à la fois a et b. Il existe donc deux entiers strictement positifs a' et b' tels

que $a = 9a'$ et $b = 9b'$.
b) Que valent $\text{pgcd}(a', b')$, $\text{ppcm}(a', b')$ et $a'b'$?
c) En déduire les valeurs possibles du couple (a', b') puis celles du couple (a, b).

Exercice 4. *Moyenne arithmético-harmonique.* On se donne $a_0 > b_0 > 0$ et on considère la suite récurrente $(a_n, b_n)_{n\geq 0}$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}.$$

1) *a)* Montrer, à l'aide d'une récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n sont bien définis et strictement positifs.
b) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $a_{n+1} \geqslant b_{n+1}$.

2) *a)* Etudier la monotonie des suites $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$.
b) Etablir la convergence des suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$.
c) Montrer qu'elles ont la même limite, notée x.

3) *a)* Montrer que le produit $a_n b_n$ ne dépend pas de n.
b) Déterminer x en fonction de a_0 et b_0.