Interrogation no. 1B.

Durée : 30 minutes.

Les documents, calculatrices, téléphones et appareils électroniques ne sont pas autorisés.

Exercice 1. *Questions de cours.*

1) Donner la définition de borne inférieure.

2) Donner la définition d'une partie majorée de $\mathbb{R}$.

3) Énoncer le théorème de la division Euclidienne.

4) Donner la définition du PGCD.

Exercice 2.

1) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$.

2) Calculer sans changer de base $\overline{333}^7 + \overline{415}^7$.

3) Convertir $\overline{164}^{10}$ en base 11.

Correction Exercice 2.

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère H_n : " $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$ ", et l'on prouve par récurrence que H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

. Initialisation : Pour $n=1$, on a $\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 2.1-1 = 1 = 1^2$, donc H_1 est vraie.

. Hérédité. On suppose H_n vraie. Alors $\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \left(\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\right) + 2(n+1)-1$

et par hypothèse de récurrence, $\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = n^2 + (2n+1) = (n+1)^2$, ce qui prouve H_{n+1}.

On conclut grâce au principe de récurrence.

2) En base 7, on a :

$$\begin{array}{r} 333 \\ +\ 415 \\ \hline 1051 \end{array}$$

d'où $\overline{333}^7 + \overline{415}^7 = \overline{1051}^7$.

3) On effectue des divisions euclidiennes successives :

$$\begin{cases} 164 = 14.11 + 10 \\ 14 = 1.11 + 3 \end{cases}$$

donc $\overline{164}^{10} = \overline{13A}^{11}$

Interrogation no. 1A.

Durée : 30 minutes.

Les documents, calculatrices, téléphones et appareils électroniques ne sont pas autorisés.

Exercice 1. *Questions de cours.*

1) Donner la définition du PPCM.

2) Énoncer le lemme d'Euclide.

3) Donner la définition de borne supérieure.

4) Donner la définition d'une partie minorée de $\mathbb{R}$.

Exercice 2.

1) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2$.

2) Convertir $\overline{167}^{10}$ en base 12.

3) Calculer sans changer de base $\overline{222}^{6} + \overline{415}^{6}$.

Correction Exercice 2 :

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'assertion H_n : " $\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2$ ".
On va montrer que H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence (sur n).
Initialisation : Si $n=0$, on a $\sum_{k=0}^{0}(2k+1) = 2.0+1 = 1$ et $(0+1)^2 = 1$, donc H_0 est vraie.
Hérédité : On suppose (pour un $n \in \mathbb{N}$ donné) que H_n est vraie. Alors

$$\sum_{k=0}^{n+1}(2k+1) = \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n}(2k+1)\right)}_{\text{Hyp. de Récurrence}} + (2(n+1)+1) = (n+1)^2 + 2n+3 = n^2+4n+4$$

, et d'autre part

$(n+2)^2 = n^2+4n+4$, ce qui prouve H_{n+1}.
On conclut grâce au principe de récurrence.

2) On effectue des divisions euclidiennes successives : $\begin{cases} 167 = 12\times 13 + 11 \\ 13 = 12\times 1 + 1 \end{cases}$, d'où $\overline{167}^{10} = \overline{11B}^{12}$

3) En base 6, on a :

$$\begin{array}{r} 222 \\ +\ 415 \\ \hline 1041 \end{array}$$

donc $\overline{222}^{6} + \overline{415}^{6} = \overline{1041}^{6}$