L1 md Corrigé de l'examen de mai 2017

1. On suppose $\exists x, P_f(x)$. On applique la règle (def. f) avec $Q \equiv P_f$; on en déduit l'équivalence $P_f(f) \Leftrightarrow (\forall x,\ P_f(x) \Rightarrow P_f(x))$. Or $P_f(x) \Rightarrow P_f(x)$ est vrai indépendamment de x, d'où $P_f(f)$

Formellement :

1 $\exists x, P_f(x)$
2 $P_f(f) \Leftrightarrow (\forall x, P_f(x) \Rightarrow P_f(x))$ (def. f)
3 x (declar)
4 $P_f(x)$ (hyp)
5 $P_f(x)$ (rep) 4
6 $P_f(x) \Rightarrow P_f(x)$ ($\vdash \Rightarrow$) 4,5
7 $\forall x, P_f(x) \Rightarrow P_f(x)$ ($\vdash \forall$) 3,6
8 $P_f(f)$ ($\Leftrightarrow \vdash$) 2,7

L'ensemble $\{x \in E, P(x)\}$ est caractérisé par la propriété $\forall z, (z \in \{x \in E, P(x)\} \Leftrightarrow (z \in E \text{ et } P(z)))$

d'où $P_{\{x\in E, P(x)\}}(A) \equiv \forall z, (z \in A \Leftrightarrow (z \in E \text{ et } P(z)))$

Sous l'hypothèse qu'au moins un ensemble A vérifiant $P_{\{x\in E, P(x)\}}(A)$ existe, on a d'après la règle (def $\{x \in E, P(x)\}$) l'équivalence $Q(\{x\in E, P(x)\}) \Leftrightarrow (\forall A,\ P_{\{x\in E, P(x)\}}(A) \Rightarrow Q(A))$ pour toute propriété Q, en particulier en prenant $Q(A) \equiv A \notin E$ et $P(x) \equiv x \notin x$ on a l'équivalence $\{x \in E, x \notin x\} \notin E \Leftrightarrow (\forall A,\ P_{\{x\in E, x\notin x\}}(A) \Rightarrow A \notin E)$

L'énoncé $\{x\in E, x \notin x\} \notin E$ se déduit alors de $\forall A,\ P_{\{x\in E, x\notin x\}}(A) \Rightarrow A \notin E$, c'est à dire de

$$\boxed{\forall A, (\forall z,\ z \in A \Leftrightarrow (z \in E \text{ et } z \notin z)) \Rightarrow A \notin E}$$

Rq L'existence de $\{x\in E, P(x)\}$, c'est à dire d'au moins un A vérifiant $P_{\{x\in E, P(x)\}}(A)$ est un axiome de la théorie des ensembles. On vérifie qu'un tel A est unique : deux tels A ont les mêmes éléments.

7.
1 a (declar)
2 $\forall x,\ x \in a \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } x \notin x)$
3 $a \in a \Leftrightarrow (a \in E \text{ et } a \notin a)$ ($\forall \vdash$) $[x := a]$ 2
4 $a \in a$ (hyp)
5 $a \in E$ et $a \notin a$ ($\Leftrightarrow \vdash$) 3,4
6 $a \notin a$ (eff.) 5
7 $\perp$ (contr.) 4,6
8 $a \notin a$ ($\vdash \neg$) 4,7
9 $a \in E$ (hyp)
10 $a \in E$ et $a \notin a$ ($\vdash$ et) 8,9
11 $a \in a$ ($\Leftrightarrow \vdash$) 3,10
12 $\perp$ (contr.) 8,11
13 $a \notin E$ ($\vdash \neg$) 9,12

On prouve, pour a un ensemble, $a \notin E$ sous l'hypothèse $\forall x,\ x \in a \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } x \notin x)$.

L'hypothèse dit $a = \{x \in E, x \notin x\}$, la conclusion dit $\{x \in E, x \notin x\} \notin E$

Formellement on peut compléter la preuve par les lignes

14 $(\forall x, x \in a \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } x \notin x)) \Rightarrow a \notin E$
15 $\forall a,\ (\forall x, x \in a \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } x \notin x)) \Rightarrow a \notin E$

L'ex 1 nous dit que la preuve ainsi obtenue de la ligne 15 nous donne une preuve de l'énoncé $\{x\in E, x\notin x\} \notin E$, pourvu que $\{x \in E, x \notin x\}$ existe ex2 On a $\mathcal{P}(x) = \{y,\ y \subset x\}$, $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$, $\mathcal{P}(\{2,3\}) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}\}$

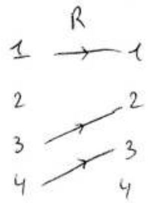
D'autre part $\cup \{a, b, c\} = \{y,\ y \in a \text{ ou } y \in b \text{ ou } y \in c\} = a \cup b \cup c$

D'où $\cup \{ \mathcal{P}(\emptyset), \mathcal{P}(\{1,2\}), \mathcal{P}(\{2,3\}) \} = \{\emptyset\} \cup \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\} \cup \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}\}$

$= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}\}$

$\mathcal{P}(\{1,2,3\})$ possède en plus les éléments $\{1,3\}$, $\{1,2,3\}$

ex3 dessin



R est fonctionnelle : un élément de l'ensemble de départ est en relation avec au plus un élément de l'ensemble d'arrivée

R n'est pas une application : 2 n'a pas d'image

R est injective : un élément de l'ensemble d'arrivée a au plus un antécédent

R n'est pas surjective : 4 n'a pas d'antécédent

ex4 a,b Voir le corrigé de l'ex3 de la session 2 2016

4 c Voir le corrigé de l'ex3 de l'examen 2016

ex5 Cf le sujet et corrigé de l'ex 6.3 de l'examen 2016 en spécifiant $S \equiv F$

5a $V \Rightarrow P \equiv P$ d'après la table de vérité

Sous l'hyp. $R \equiv V$ on a $E \equiv (((Q \Rightarrow P) \Rightarrow Q) \text{ ou } P \text{ ou } F) \equiv ((Q \Rightarrow P) \Rightarrow Q) \text{ ou } P$

table de vérité

P	Q	$Q \Rightarrow P$	$(Q \Rightarrow P) \Rightarrow Q$	E
V	V	V	V	V
F	V	F	V	V
V	F	V	F	V
F	F	V	F	F

On reconnait la table de vérité de P ou Q

Autre méthode : $A \Rightarrow B \equiv \neg A \text{ ou } B$ donc $(Q \Rightarrow P) \Rightarrow Q \equiv \neg(Q \Rightarrow P) \text{ ou } Q \equiv (Q \text{ et } \neg P) \text{ ou } Q \equiv Q$

$((Q \Rightarrow P) \Rightarrow Q) \text{ ou } P \equiv Q \text{ ou } P$

5b On suppose $R \equiv F$ alors $R \Rightarrow A \equiv V$ quel que soit A donc $E \equiv V$

5c On en déduit $E \equiv \neg R$ ou (P ou Q)

5d $\overline{\neg E} = \overline{R \text{ et } \neg P \text{ et } \neg Q} = \bar{R}\,(1+\bar{P})\,(1+\bar{Q})$

$\bar{E} = 1 + \overline{\neg E} = 1 + \bar{R}\,(1+\bar{P})(1+\bar{Q})$ (on retrouve bien $\bar{E} = 1$ si $\bar{R} = 0$ ou $\bar{P} = 1$ ou $\bar{Q} = 1$)

ex6
1 $\bot$
2 | A (hyp)
3 | $\bot$ (rep) 1
4 $\neg A$ ($\vdash\neg$) 2,3

Appliqué à $\neg A$ on obtient
1 $\bot$
2 $\neg\neg A$ ($\bot\vdash$)
3 $\neg\neg A \Rightarrow A$ (ax $\neg\neg$)
4 A (mp) 2,3