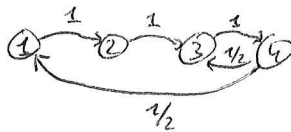


ex1 la matrice  $\begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$  est elle régulière ? Qu'en est il de  $\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$  ?

ex2 On considère la chaîne de Markov de graphe  $(X_n)$



$(X_n)$  est elle régulière ?

Que vaut  $P(X_7=4 | X_0=1)$  ?  $P(X_8=4 | X_0=1)$  ?

$(X_n)$  admet elle une mesure stationnaire ( $\leftrightarrow$  invariante)  $\mu$  ? Si oui a l.-m  $P(X_{2n}=4 | X_0=1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(4)$  ?

ex3 Jean apprend ses leçons chaque jour mais il le fait aléatoirement suivant la loi suivante :

S'il travaille un jour, il travaille le lendemain avec probabilité  $2/3$

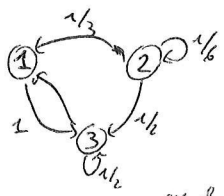
S'il travaille un jour, il travaille le lendemain avec probabilité  $1/3$

Mais s'il travaille trois jours de suite alors assurément il ne travaille pas le jour suivant.

Modéliser le comportement de Jean par une chaîne de Markov

Combien de jour par mois (de 30 jours) en moyenne Jean apprend il ses leçons ?

ex 1.2



commence au sens circulaire + boucle @

est non régulière

2 est transitive non régulière

ex 1.1 P est triangulaire inférieure

→ P<sup>n</sup> carré non régulière

ou bien graphe 1 → 2 mais pas 2 → 1

ex 2 irréductible (graphe commutatif au sens circulaire) mais pgcd {long. 3 → 3} = 2 non régulière

$$\left. \begin{array}{l} 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \xrightarrow{1/2} 3 \rightarrow 4 \xrightarrow{1/2} 3 \rightarrow 4 \\ 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \xrightarrow{1/2} 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1/4 + 1/2 = 3/4 = P(X_7=4 | X_0=1) \\ P(X_8=4 | X_0=1) = 0 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1/2 t = x \\ x = y \\ y + 1/2 t = z \\ z = t \\ x + y + z + t = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} x = 1/2 t \\ y = 1/2 t \\ z = t \\ t(1/2 + 1/2 + 1 + 1) = 1 \Rightarrow t = 1/3 \end{array}$$

$$\Rightarrow P = \left( \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

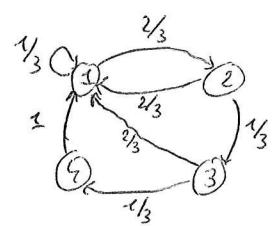
$$1/3 \neq \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_{2n}=4 | X_0=1) = 0$$

ex 3 1: ne travaille pas

2: travaille parfois mais ma pas travaillé la veille

3: travaille pour la 2<sup>ème</sup> fois de suite

4: ————— 3<sup>ème</sup> —————



$$\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 & 1 \\ 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

régulière

$$\begin{cases} x + 2y + 2z + 3t = 3x \\ 2x = 3y \\ y = 3z \\ z = 3t \\ x + y + z + t = 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} z = 3t \\ y = 9t \\ x = 27/2 t \end{array}$$

$$27/2 + 18 + 6 + 3 = 81/2 \text{ ok}$$

$$\left( \frac{27}{2} + 9 + 3 + 1 \right) t = 1 \Rightarrow t = \frac{2}{53}$$

$$P(X_n = 1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{27}{53}$$

$$P(\text{Jean travaille le jour } n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{26}{53} = \frac{1}{2} + \frac{1}{106} = \frac{30 \times 26}{53}$$

$$\frac{1}{100} - \frac{1}{110} = \frac{1}{100} \left( 1 - \frac{6}{100} + \frac{36}{10^4} - \frac{216}{10^6} + \dots \right)$$

$$\approx 0,00943384\dots$$

$$\approx 0,943384$$

$$M_n \approx \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{100} \right) \times 30 = 15 - \frac{3}{10} \text{ jours travaillés}$$

par Mois de 30 j. en moyenne.