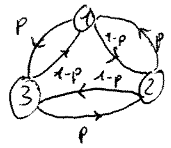
L2 Mass - option "Jeux et décision"

Corrigé de l'examen du 7 décembre 2007

1a On dessine d'abord le graphe associé au processus



puis la matrice $P=(p_{ij})$ où p_{ij} = proba d'aller de i à j

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1-p & p \\ p & 0 & 1-p \\ 1-p & p & 0 \end{pmatrix}$$

1b On peut calculer P^3 (long) ou ~~bien~~ mieux décrire les chemins de longueur 3 joignant 1 à 1, de proba $\neq 0$. Ceux ci sont $1\to2\to3\to1$ et $1\to3\to2\to1$.

On a $p_{1,1}^{(3)} = P(1\to2\to3\to1) + P(1\to3\to2\to1)$, $P(1\to2\to3\to1) = P(1\to2)\,P(2\to3)\,P(3\to1)$ (chaque déplacement est indépendant du précédent) ~~sachant la position courante~~ de même $P(1\to3\to2\to1) = P(1\to3)\,P(3\to2)\,P(2\to1)$

Donc $p_{1,1}^{(3)} = (1-p)^3 + p^3$

De même les chemins de longueur 3 de 1 à 2 sont $1\to2\to1\to2$, $1\to2\to3\to2$, $1\to3\to1\to2$ d'où

$p_{1,2}^{(3)} = P(1\to2\to1\to2) + P(1\to2\to3\to2) + P(1\to3\to1\to2) = 3\,p(1-p)^2$

1c Par définition P est régulière s'il existe un entier $n>0$ tq P^n soit à coefficients >0.

On peut essayer les petites valeurs de n, calculer $P^2 = \begin{pmatrix} 2p(1-p) & p^2 & (1-p)^2 \\ (1-p)^2 & 2p(1-p) & p^2 \\ p^2 & (1-p)^2 & 2p(1-p) \end{pmatrix}$ et on voit que si $0<p<1$ alors P^2 est à coefficients >0 donc P est régulière. Si $p=0$ ou $p=1$ on voit que $P^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$ donc $P^{3n} = I_3$ quelquesoit $n>0$ donc P n'est pas régulière. (On sait que si P^{n_0} est à coefficients >0 alors P^{n_0+k} est aussi à coefficients >0 pour tout $k\geq 0$)

Autre méthode (cf ex 5) On observe que P^n est à coefficients >0 si et seulement si pour tout couple d'états (i,j) il existe un chemin de longueur n entre i et j. On voit tout de suite que si $0<p<1$ alors quel que soit (i,j) il existe un chemin de longueur 2 de i à j : $i\to k\to j$ avec $k\in\{1,2,3\}\setminus\{i,j\}$

Si $p=0$ les chemins de 1 à 1 sont de longueur un multiple de 3 alors que ceux de 1 à 2 sont de longueur 1 plus un multiple de 3 donc il n'existe pas d'entier n avec un chemin de longueur n de 1 à 1 et un chemin de longueur n de 1 à 2

1d. Si $p=0$ ou $p=1$ alors $p_n = 1$ si n est un multiple de 3, ~~et~~ $p_n = 0$ sinon donc la suite (p_n) ne converge pas.

Supposons $0<p<1$ alors la matrice de transition P est régulière d'après 1c, donc d'après le cours, quel que soit (x,y,z) vecteur de probabilité, la suite $(x,y,z)\,P^n$ converge vers l'unique vecteur de proba fixe par P. Soit (α,β,γ) ce vecteur ~~On~~ p_n est la première composante du vecteur $(1,0,0)\,P^n$ donc la suite (p_n) converge vers α.

On calcule α en résolvant le système $(\alpha,\beta,\gamma) = (\alpha,\beta,\gamma)\,P$ lequel équivaut à $\begin{cases} \alpha = p\beta + (1-p)\gamma \\ \beta = (1-p)\alpha + p\gamma \\ \gamma = \alpha(1-p) + \beta p \end{cases}$ donc à $\begin{cases} \alpha = p\beta + (1-p)\gamma \\ \beta(1-p(1-p)) = \gamma\,(p+(1-p)^2) \end{cases}$

Comme $0<p<1$, $p(1-p)<1$ donc $1-p(1-p)\neq 0$. On obtient $\beta=\gamma$ puis $\alpha=\beta$

On cherche (α,β,γ) vecteur de probabilité. $(\alpha,\beta,\gamma) = \left(\frac13,\frac13,\frac13\right)$ est la seule solution.

On aurait ~~égal~~ pu également observer que chaque colonne de P somme à 1 donc $(1,1,1)$ est vecteur propre de ${}^tP$ pour la valeur propre 1 donc $\left(\frac13,\frac13,\frac13\right)$ est un vecteur de probabilité fixe par P.

Conclusion si $0<p<1$ alors la suite (p_n) converge vers $\frac{1}{3}$

2a $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ est la matrice de paiement du joueur 1, les stratégies du joueur 1 correspondant aux lignes, celles du joueur 2 aux colonnes

2b En stratégie pure, les stratégies optimales du joueur 1 sont celles maximisant le gain garanti.

le gain garanti du joueur 1 en jouant la stratégie 1 est -1, celui en jouant la stratégie 2 est -2 donc la seule stratégie optimale est la première.

La stratégie optimale du joueur 2 est celle minimisant sa perte possible. En jouant sa première stratégie le joueur 2 peut perdre 1, en jouant la seconde il peut perdre 2 donc sa seule stratégie optimale est sa stratégie 1.

Le couple $(1,1)$ n'est pas un point selle : le jeu n'admet pas de valeur en stratégie pure.

Si on considère le prolongement mixte du jeu :

La stratégie mixte optimale du joueur 1 ~~est le~~ correspond au réel $p\in[0,1]$ maximisant $\min\{-p+1-p,\ 2p-2(1-p)\}=\min\{1-2p, 4p-2\}$

On a $\min\{1-2p, 4p-2\} = \begin{cases} 4p-2 & \text{si } p\in[0,\frac{1}{2}] \\ 1-2p & \text{si } p\in[\frac{1}{2},1] \end{cases}$. La fonction $p\mapsto \min\{1-2p, 4p-2\}$ est croissante puis décroissante. Le maximum est atteint en $\frac{1}{2}$ et vaut 0. Conclusion : la stratégie mixte optimale du joueur 1 est le couple $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

On connait maintenant la valeur du jeu en stratégie mixte : 0. La stratégie mixte optimale du joueur 2 est le couple $(q, 1-q)$ où $q\in[0,1]$ est tel que $\max\{-q+2(1-q),\ q-2(1-q)\}=0$

soit $2-3q\leq 0$ et $-2+3q\leq 0$ ce qui équivaut à $2-3q=0$ $\quad q=\frac{2}{3}$

Conclusion : la stratégie mixte optimal du joueur 2 est $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$

4a Matrice de paiement $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Le point $(2,1)$ est minimal sur la ligne 2 et maximal sur la colonne 1 : c'est un point selle

Donc le jeu admet une valeur en stratégie pure qui vaut 3.

4b Une stratégie mixte du joueur 1 est un couple $(p, 1-p)$ avec $p\in[0,1]$ le joueur 1 joue sa stratégie 1 avec probabilité p, sa stratégie 2 avec probabilité $1-p$

Si $(p,1-p)$ est une stratégie mixte du joueur 1, $(q,1-q)$ une stratégie mixte du joueur 2, l'espérance de gain du joueur 1 correspondant est $2pq + p(1-q) + 3(1-p)q + 5(1-p)(1-q) = 3pq - 4p - 2q + 5$

L'espérance de gain garantie du joueur 1 s'il joue $(p,1-p)$ est $\inf_{q\in[0,1]}(3pq-4p-2q+5) = \min\{5-4p, 3-p\}$

La stratégie mixte $(p,1-p)$ du joueur 1 est optimale si elle maximise l'espérance de gain garantie du joueur 1 $\min\{5-4p, 3-p\}$

La stratégie mixte $(q,1-q)$ du joueur 2 est optimale si elle minimise l'espérance de perte possible $\max\{2q+1-q,\ 3q+5(1-q)\}=\max\{1+q, 5-2q\}$

Pour une matrice de paiement quelconque $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, on a $\sup_{p\in[0,1]} \min\{ap+b(1-p),\ cp+d(1-p)\} = -\sup_{q\in[0,1]} \min\{-aq-c(1-q), -bq-d(1-q)\}$

$$= \inf_{q\in[0,1]} \max\{aq+c(1-q),\ bq+d(1-q)\}$$

(4b) ce qui se traduit par : l'espérance de gain garantie ~~du~~ optimale du joueur 1 est égale à ~~l'espérance~~ l'opposé de l'espérance de gain garantie optimale du joueur 2.

Si on ne considère que les stratégies pures, on a $\max\{\min\{a,c\}, \min\{b,d\}\} \leq -\max\{\min\{-a,-b\}, \min\{-c,-d\}\} = \min\{\max\{a,b\}, \max\{c,d\}\}$

qui se traduit par : le gain garanti optimal du joueur 1 est inférieur ou égal à l'opposé du gain garanti optimal du joueur 2. L'inégalité est stricte si le jeu n'a pas de valeur en stratégie pure

4c Valeur du jeu en stratégie mixte = valeur du jeu en stratégie pure puisque celle-ci est définie
$= 3$

Par le calcul : on cherche $\sup_{p\in[0,1]} \min\{5-4p, 3-p\}$. On a $3-p < 5-4p$ pour $p=0$, $3-p = 5-4p$ pour $p=\frac{2}{3}$, $3-p > 5-4p$ pour $p > \frac{2}{3}$

donc $\min\{3-p, 5-4p\} = 3-p$ si $p\in[0,\frac{2}{3}]$
$= 5-4p$ si $p \in [\frac{2}{3}, 1]$. On observe que l'application $p \mapsto \min\{3-p, 5-4p\}$ est décroissante sur $[0,1]$ donc

le sup est atteint en 0 et vaut $\min\{3,5\} = 3$

4d On a pour $p\in[0,1]$ $\min\{3-p, 5-4p\} \leq 3$ avec égalité ssi $(p, 1-p)$ est optimal pour le joueur 1

Or ~~$\min\{3-p,5-4p\}$~~ $3-p < 3$ si $p>0$ donc $\min\{3-p, 5-4p\} < 3$ si $p>0$ donc l'égalité n'a lieu que pour $p=0$

On sait d'autre part qu'on a $\inf_{q\in[0,1]} \max\{2q+1-q, 3q+5(1-q)\} = 3$ (puisque 3 est la valeur du jeu en stratégie mixte)

La stratégie $(q, 1-q)$ est optimale pour le joueur 2 ssi $\max\{1+q, 5-2q\} = 3$ sachant $q\in[0,1]$. Or si $q<1$, $5-2q>3$ donc

$\max\{1+q, 5-2q\} = 3$ ssi $q=1$. ~~donc~~

4e Matrice de paiement $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. On voit que $(2,2)$ est point selle donc le jeu admet la valeur 2 en stratégie pure donc la valeur

en stratégie mixte est 2. (On peut aussi calculer $\sup_{p\in[0,1]} \min\{p+3(1-p), 2p+2(1-p), 3p+2(1-p)\}$)

La stratégie $(p, 1-p)$ du joueur 1 est optimale ssi $\min\{3-2p, 2, 2+2p\} = 2$ donc si $3-2p \geq 2$ (on a $\forall p\in[0,1]$ $2+2p\geq 2$)

(Pour p dans $[0,1]$) $3-2p \geq 2 \iff p \leq \frac{1}{2}$ donc l'ensemble des stratégies mixtes optimales du joueur 1 est $\{(p, 1-p), 0\leq p \leq \frac{1}{2}\}$

La stratégie $(q_1, q_2, 1-q_1-q_2)$ du joueur 2 est optimale ssi $\max\{q_1+2q_2+3(1-q_1-q_2), 3q_1+2q_2+2(1-q_1-q_2)\} = 2$

On a $3q_1+2q_2+2(1-q_1-q_2) = 2+q_1 > 2$ si $q_1>0$ donc $q_1=0$ puis $q_1+2q_2+3(1-q_1-q_2) = 3-q_2 > 2$ si $q_2<1$ donc $q_2=1$

Conclusion : $(0,1,0)$ est la seule stratégie optimale du joueur 2.

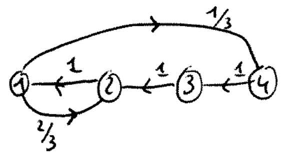
5 a On suppose P^n est à coefficients >0 pour un certain entier n. On observe P^n est à coefficients $>0 \Rightarrow P^{n+1}$ est à coefficients >0

Le coefficient d'indice (i,i) de P^n est égal à $p_{i,i}^{(n)}$: la probabilité de passer de l'état i à l'état i en n étapes. Donc $p_{i,i}^{(n)}>0$

Or $p_{i,i}^{(n)}$ est égal à la somme des probabilités des chemins de longueur n de i à i donc il existe au moins un tel chemin.

De même $p_{i,i}^{(n+1)}>0$ donc il existe au moins un chemin de longueur $n+1$ de i à i.

5b Le graphe associé à la matrice de transition est



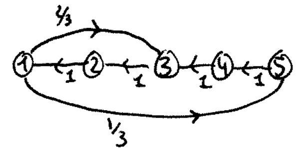
Les chemins de 1 à 1 sont de longueur $2k+4\ell$ avec $k,\ell\in\mathbb{N}$ k ou $\ell>0$ k étant le nombre de boucle $1 \rightleftarrows 2$, ℓ le nombre de passages par l'état 4. Les longueurs décrivent tous les entiers pairs >0

Les chemins de 3 à 3 se décompose comme $3\to2\to1$ plus un chemin de 1 à 1 plus $1\to4\to3$ donc sont de longueur $4+2k+4\ell$ avec $k,\ell\geq0$

On obtient tous les entiers pairs ≥ 4

Si la matrice était régulière on aurait des chemins de 1 à 1 de longueur n et $n+1$ pour un certain n donc au moins un chemin de 1 à 1 de longueur impaire. Or un tel chemin n'existe pas donc la matrice n'est pas régulière.

5c Graphe :



Les longueurs des chemins de 1 à 1 sont les entiers $3k+5\ell$ avec $k,\ell\in\mathbb{N}$, k ou $\ell>0$. Mêmes longueurs pour les chemins de 3 à 3.

On cherche un entier n tel qu'on ait des chemins de longueur n et $n+1$ de chaque état i au même état i. Pour les états 1, 2, 3 on a des chemins de longueur 8 et 9. Pour les états 4 et 5 on a des chemins de longueur 10 et 11

On cherche ensuite un entier n tel qu'on ait pour tout état i des chemins de longueur $n+k$ de i à i quel que soit $k\geq0$

$n=10$ ne convient pas. En effet on a ~~des~~ un ~~chemins~~ chemin de longueur $10 = 5\times2$, de longueur $11 = 5+3\times2$ et ~~de longueur~~ mais pas de longueur 12 entre 5 et 5

$n=13$ convient : $13 = 2\times5+3$, $14 = 5+3\times3$, $15 = 3\times5$ et si on a un chemin de longueur n, on a aussi un chemin de longueur $n+3$

On observe ensuite que pour chaque couple d'états (i,j) avec $i\neq j$ on a un chemin de i à j de longueur ≤ 4. Notons k_{ij} cette longueur

On observe enfin que pour tout couple (i,j) on a un chemin de longueur 17 : on écrit $17 = k_{ij} + 13+(4-k_{ij})$, On a un chemin de longueur k_{ij} de i à j puis un chemin de longueur $13+(4-k_{ij})$ de j à j puisque $4-k_{ij}\geq0$.

Conclusion $p_{ij}^{(17)}>0$ $\forall i,j$ donc P^{17} est à coefficients >0 : P est régulière

Rq $p_{5,5}^{(12)}=0$ donc P^{12} n'est pas à coefficients >0 ! Un calcul sur ordinateur montre que P^{14} est à coefficients >0