Licence L3 - option de géométrie **feuille 1** **6 octobre 2004**

Dans le plan $\mathbb{R}^2$:

1. Donner une équation cartésienne de la droite passant par le point $(0, \sqrt{3})$ et parallèle à la droite d'équation $2x - y + 3 = 0$; de celle passant par ce même point et orthogonale à la droite donnée.

2. Soient $A(1, 2)$, $B(3, 1)$, $C(-3, -2)$, $D(0, -1)$ quatre points de $\mathbb{R}^2$.

a. Montrer que les points A, B, C sont non alignés. Montrer que les droites (AB) et (CD) sont non parallèles.

b. Donner une équation cartésienne de la droite (AB). Calculer le point d'intersection des droites (AB) et (CD).

c. Donner l'expression analytique de la symétrie par rapport à la droite (AB) parallèlement à la droite (CD). Donner une équation de l'image par cette symétrie de la droite d'équation $2x - y + 3 = 0$, de celle d'équation $x - 3y - 5 = 0$.

3. Le plan $\mathbb{R}^2$ est muni de la distance euclidienne canonique $d((x, y), (x', y')) = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$. Calculer la distance du point $(3, 1)$ à la droite d'équation $x - 3y - 3 = 0$.

Les exercices 4, 5, 6, 7 et 8 sont tirés de [collection Durande, exercices pour la classe de première, Tome II géométrie, 1982].

4. Soient A, B deux points fixés du plan, k un réel positif fixé et soient M, N deux points vérifiant $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{NB} + 5\overrightarrow{AB} = 0$ et $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MN} + 2(2k^2 - 1)\overrightarrow{AB} = 0$.

a. Démontrer l'existence et l'unicité de M et N.

b. Déterminer l'ensemble des points M et l'ensemble des points N lorsque k décrit $\mathbb{R}_+$.

c. Représenter les fonctions $k \mapsto AM$ et $k \mapsto AN$. Est-il possible que M et N soient confondus ? que A soit le milieu du segment $[M, N]$?

5. Soient D_1 la droite d'équation $x - y + 2 = 0$ et D_2 celle d'équation $2x + 3y + 1 = 0$. A tout réel m on associe la droite $\triangle_m$ d'équation $(2m + 1)x + (3m - 1)y + m + 2 = 0$.

a. Soit M_0 le point commun de D_1 et D_2. Montrer que M_0 est sur $\triangle_m$ quel que soit m.

b. Soit A un point du plan. Discuter suivant la position de A le nombre de droites $\triangle_m$ passant par A.

6. Soient D_1 et D_2 les droites d'équation respective $x\sqrt{3} - y + 1 = 0$ et $x + y\sqrt{3} - 2 = 0$. Soit M_0 le point commun de D_1 et D_2. Donner une équation de la droite passant par M_0 et le point $A(\sqrt{2}, 1)$, de la droite passant par M_0 et parallèle à la droite d'équation $2x + y = 0$. (Utiliser l'exercice 5.)

7. Soient A, B deux points distincts du plan, λ un réel distinct de 0 et 1, C le point tel que $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$.

a. Quel est l'ensemble E des triplets (α, β, γ) de $\mathbb{R}^3$ tels que A est le barycentre de $\{(B, \beta), (C, \gamma)\}$, B est le barycentre de $\{(C, \gamma), (A, \alpha)\}$ et C est le barycentre $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$?

b. Soit O un point du plan. Lorsque (α, β, γ) décrit E que peut-on dire du vecteur $\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}$?

c. Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in E$, Γ un cercle du plan et $\overrightarrow{v}$ un vecteur fixé. Déterminer l'ensemble décrit par le point M' vérifiant $\overrightarrow{MM'} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{v}$ lorsque M décrit Γ.

d. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in E$. A tout point M du plan on associe le réel $s_M = \alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2$. Etudier s_M lorsque M décrit le plan.

8. Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique :

a. Soient O, A, B, C, D cinq points tels que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ ont même norme et sont de somme nulle. Que peut-on dire du quadrilatère (A, B, C, D) ?

b. Soient E, F, G, H quatre points distincts fixés. Déterminer un point O tel qu'il existe quatre points A, B, C, D vérifiant :

- A, B, C, D sont chacun sur une et une seule des droites (OE), (OF), (OG), (OH),
- les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ ont même norme et sont de somme nulle.

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique :

9. Montrer que les points $A(1, 2, -1)$, $B(1, 3, 4)$, $C(2, 2, 2)$ et $D(0, 2, -4)$ sont coplanaires. Calculer la distance du point $(1, 2, 3)$ à ce plan. Claculer la distance entre les droites (AB) et $(C'D')$ où C' est le point de coordonnées $(3, 3, 3)$ et D' celui de coordonnées $(1, 3, -3)$.