Licence L3 - option géométrie **feuille 1** **28 septembre 2006**

1. Soient E un espace vectoriel et F une partie de E. Comparer les énoncés sur F suivants (c'est à dire donner les implications d'un énoncé par un autre et montrer les non-implications par des exemples) :

(i) L'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{MN}$, M et N décrivant F, est un sous-espace vectoriel de E.

(ii) Pour tout $M \in F$, l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{MN}$, N décrivant F, est un sous-espace vectoriel de E.

(iii) Il existe M dans F tel que l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{MN}$, N décrivant F, est un sous-espace vectoriel de E.

($\overrightarrow{MN}$ désigne l'élément $N - M$ de E.)

2. *Vecteurs et parallélogramme.* Soient A, B, C, D quatre points distincts d'un plan affine. Montrer qu'on a équivalence entre les conditions suivantes :

(i) La droite (AB) est parallèle à la droite (CD) et la droite (AC) est parallèle à la droite (BD).

(ii) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

(iii) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

(iv) Les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont même milieu.

3. La réunion de deux droites affines du plan est elle un sous-espace affine ? (Discuter suivant les cas.)

4. Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Montrer que pour tout $y \in F$ l'ensemble $f^{-1}(y)$ est un sous-espace affine de E. Quelle est sa direction ?

5. Soit E un espace vectoriel. Montrer que l'intersection d'une famille quelconque de sous-espaces affines de E est un sous-espace affine de E. Quelle est la direction de l'intersection si l'intersection est non vide ?

6. Démontrer les énoncés suivants :

(a) Par deux points distincts d'un espace vectoriel il passe une et une seule droite.

(b) Par un point donné il passe une et une seule droite parallèle à une droite donnée.

(c) Dans $\mathbb{R}^2$ deux droites affines sont soit sécantes soit parallèles.

Déduire de ces énoncés le fait que deux droites parallèles sont soit confondues soit disjointes.

Révision de géométrie dans le plan $\mathbb{R}^2$:

7. Donner une équation cartésienne de la droite passant par le point $(0, \sqrt{3})$ et parallèle à la droite d'équation $2x - y + 3 = 0$; de celle passant par ce même point et orthogonale à la droite donnée.

8. Soient $A(1, 2)$, $B(3, 1)$, $C(-3, -2)$, $D(0, -1)$ quatre points de $\mathbb{R}^2$.

a. Montrer que les points A, B, C sont non alignés. Montrer que les droites (AB) et (CD) sont non parallèles.

b. Donner une équation cartésienne de la droite (AB). Calculer le point d'intersection des droites (AB) et (CD).

9. Soient D_1 la droite d'équation $x - y + 2 = 0$ et D_2 celle d'équation $2x + 3y + 1 = 0$. A tout réel m on associe la droite $\triangle_m$ d'équation $(2m + 1)x + (3m - 1)y + m + 2 = 0$.

a. Soit M_0 le point commun de D_1 et D_2. Montrer que M_0 est sur $\triangle_m$ quel que soit m.

b. Soit A un point du plan. Discuter suivant la position de A le nombre de droites $\triangle_m$ passant par A.

10. Soient D_1 et D_2 les droites d'équation respective $x\sqrt{3} - y + 1 = 0$ et $x + y\sqrt{3} - 2 = 0$. Soit M_0 le point commun de D_1 et D_2. Donner une équation de la droite passant par M_0 et le point $A(\sqrt{2}, 1)$, de la droite passant par M_0 et parallèle à la droite d'équation $2x + y = 0$. (Utiliser l'exercice 9.)

11. Dans $\mathbb{R}^2$ soient $O = (1, -2)$, $\overrightarrow{u} = (1, 2)$ et $\overrightarrow{v} = (1, 3)$. Quelles sont les coordonnées du points $(-1, -1)$ dans le repère cartésien $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$? Quelle est l'équation cartésienne de la droite d'équation $2x + 3y + 4 = 0$ dans le repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$?