Licence L3 - option de géométrie **feuille 2** **27 octobre 2004**

Exercices autour du cours.

1. Soit E un espace vectoriel. Montrer que la relation "être colinéaire à" est une relation d'équivalence sur $E - \{0\}$ mais pas sur E entier.

2. Soient E un espace vectoriel et F une partie de E. Comparer les énoncés sur F suivants (c'est à dire donner les implications d'un énoncé par un autre et montrer les non-implications par des exemples) :

(i) L'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{MN}$, M et N décrivant F, est un sous-espace vectoriel de E.

(ii) Pour tout $M \in F$, l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{MN}$, N décrivant F, est un sous-espace vectoriel de E.

(iii) Il existe M dans F tel que l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{MN}$, N décrivant F, est un sous-espace vectoriel de E.

($\overrightarrow{MN}$ désigne l'élément $N - M$ de E.)

3. Soient a, b, c, d quatre paramètres réels. Exprimer en fonction de x' et y' les réels x, y vérifiant

$$\begin{cases} x' = ax + cy \\ y' = bx + dy \end{cases} .$$

Interprétation matricielle ?

4. Démontrer les énoncés suivants :

(a) Par deux points distincts d'un espace vectoriel il passe une et une seule droite.

(b) Par un point donné il passe une et une seule droite parallèle à une droite donnée.

(c) Dans $\mathbb{R}^2$ deux droites affines sont soit sécantes soit parallèles.

Déduire de ces énoncés le fait que deux droites parallèles sont soit confondues soit disjointes.

5. Soit E un espace vectoriel. Montrer que l'intersection d'une famille quelconque de sous-espaces affines de E est un sous-espace affine de E. Quelle est la direction de l'intersection si l'intersection est non vide ?

6. Soient A et B deux points distincts d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et M un point de la droite (AB). Quelle est la nature de l'ensemble des couples (α, β) de réels tels que M soit le barycentre des points pondérés $(A, \alpha), (B, \beta)$?

Exercices.

7. Soient A, B deux points du plan euclidien $\mathcal{P}$ et α, β deux réels. Etudier l'application $\varphi : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, $M \mapsto \alpha MA^2 + \beta MB^2$. Quel est la nauture de l'image réciproque par φ d'un réel donné ?