**1.** *Vecteurs et parallélogramme.* Soient $A, B, C, D$ quatre points distincts d'un plan affine. Montrer qu'on a équivalence entre les conditions suivantes :

(i) La droite $(AB)$ est parallèle à la droite $(CD)$ et la droite $(AC)$ est parallèle à la droite $(BD)$.

(ii) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

(iii) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

(iv) Les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont même milieu.

**2.** *Théorème de Thalès.* Soient $D$ et $D'$ deux droites d'un plan affine, $\triangle_1$, $\triangle_2$ et $\triangle_3$ trois droites parallèles entre elles coupant $D$ en les points $A_1$, $A_2$, $A_3$ et $D'$ en $A_1'$, $A_2'$, $A_3'$ respectivement. On suppose $\triangle_1$ et $\triangle_3$ non confondues. Montrer qu'on a l'égalité

$$\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1A_3}} = \frac{\overline{A_1'A_2'}}{\overline{A_1'A_3'}} .$$

**3.** Soient $E$ un espace vectoriel et $F$ une partie de $E$. Comparer les énoncés sur $F$ suivants (c'est à dire donner les implications d'un énoncé par un autre et montrer les non-implications par des exemples) :

(i) L'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $M$ et $N$ décrivant $F$, est un sous-espace vectoriel de $E$.

(ii) Pour tout $M \in F$, l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $N$ décrivant $F$, est un sous-espace vectoriel de $E$.

(iii) Il existe $M$ dans $F$ tel que l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $N$ décrivant $F$, est un sous-espace vectoriel de $E$.

($\overrightarrow{MN}$ désigne l'élément $N - M$ de $E$.)

**4.** La réunion de deux droites affines du plan est elle un sous-espace affine ? (Discuter suivant les cas.)

**5.** Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Montrer que pour tout $y \in F$ l'ensemble $f^{-1}(y)$ est un sous-espace affine de $E$. Quelle est sa direction ?

**6.** Soit $E$ un espace vectoriel. Montrer que l'intersection d'une famille quelconque de sous-espaces affines de $E$ est un sous-espace affine de $E$. Quelle est la direction de l'intersection si l'intersection est non vide ?

**7.** Démontrer les énoncés suivants :

(a) Par deux points distincts d'un espace vectoriel il passe une et une seule droite.

(b) Par un point donné il passe une et une seule droite parallèle à une droite donnée.

(c) Dans $\mathbb{R}^2$ deux droites affines sont soit sécantes soit parallèles.

Déduire de ces énoncés le fait que deux droites parallèles sont soit confondues soit disjointes.

**8.** (*Partiel de nov 2004*) Soient $P$ un plan affine de $\mathbb{R}^3$ et $A$ un point de $\mathbb{R}^3$ n'appartenant pas à $P$. Montrer qu'une droite affine de $\mathbb{R}^3$ passant par $A$ soit intersecte $P$ en un point, soit lui est parallèle.

**9.** (*Partiel de nov 2004*) Soient $(u, v, w)$ une base de $\mathbb{R}^3$, $A$ un point de $\mathbb{R}^3$, $D$ la droite passant par $A$ de vecteur directeur $u$.

**a.** Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on note $M_\lambda$ le point $A + w + \lambda v$. Montrer qu'il existe un et un seul plan passant par $M_\lambda$ et contenant $D$. On le note $P_\lambda$.

**b.** Montrer que lorsque $\lambda$ décrit $\mathbb{R}$, $P_\lambda$ décrit tous les plans contenant $D$ sauf un qu'on notera $P_\infty$. Déterminer la direction de $P_\infty$ en fonction de $u$, $v$ et $w$.