1. Soient A, B, C, D quatre points distincts d'un espace vectoriel. Montrer que A, B, C, D sont alignés si et seulement si A, B, C sont alignés et B, C, D sont alignés. Cela reste t-il vrai si on ne suppose plus les points A, B, C, D distincts ?

2. *Théorème de Thalès.* Soient D et D' deux droites d'un plan vectoriel, $\triangle_1$, $\triangle_2$ et $\triangle_3$ trois droites parallèles entre elles coupant D en les points A_1, A_2, A_3 et D' en A'_1, A'_2, A'_3 respectivement. On suppose $\triangle_1$ et $\triangle_3$ non confondues. Montrer qu'on a l'égalité

$$\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1A_3}} = \frac{\overline{A'_1A'_2}}{\overline{A'_1A'_3}} .$$

3. (*Partiel de nov 2004*) Soient P un plan affine de $\mathbb{R}^3$ et A un point de $\mathbb{R}^3$ n'appartenant pas à P. Montrer qu'une droite affine de $\mathbb{R}^3$ passant par A soit intersecte P en un point, soit lui est parallèle.

4. (*Partiel de nov 2004*) Soient (u, v, w) une base de $\mathbb{R}^3$, A un point de $\mathbb{R}^3$, D la droite passant par A de vecteur directeur u.

a. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on note M_λ le point $A + w + \lambda v$. Montrer qu'il existe un et un seul plan passant par M_λ et contenant D. On le note P_λ.

b. Montrer que lorsque λ décrit $\mathbb{R}$, P_λ décrit tous les plans contenant D sauf un qu'on notera P_∞. Déterminer la direction de P_∞ en fonction de u, v et w.

5. Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les points $A = (1, 0, 1, 1)$, $B = (1, 2, 3, 4)$ et $C = (1, 3, 2, 4)$. Trouver un système d'équations cartésiennes (relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^4$) du plus petit sous-espace affine de $\mathbb{R}^4$ passant par les trois points A, B, C.

6. Soient a, b, c, d quatre réels et P l'ensemble des éléments (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $ax + by + cz + d = 0$.

a. Discuter suivant les valeurs de a, b, c, d la nature de P comme sous-ensemble de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

b. Soient a', b', c', d' quatre réels avec $(a', b', c') \neq (0, 0, 0)$. Soit P' le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $a'x + b'y + c'z + d' = 0$. A quelle condition sur a, b, c, d a t-on $P = P'$? $P \parallel P'$? $\dim(P \cap P') = 1$?

7. Soient A, B deux points distincts du plan, λ un réel distinct de 0 et 1, C le point tel que $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$.

a. Quel est l'ensemble E des triplets (α, β, γ) de $\mathbb{R}^3$ tels que A est le barycentre de $\{(B, \beta), (C, \gamma)\}$, B est le barycentre de $\{(C, \gamma), (A, \alpha)\}$ et C est le barycentre $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$?

b. Soit O un point du plan. Lorsque (α, β, γ) décrit E que peut-on dire du vecteur $\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}$?

8. *Le théorème de Ceva.* Dans le plan soient A, B, C trois points non alignés. Soit M un point du plan. Calculer en fonction des coordonnées barycentriques de M dans le repère (A, B, C) les coordonnées barycentrique dans ce même repère de l'intersection de la droite (AM) avec (BC). (Les coordonées barycentriques de M dans le repère (A, B, C) sont le triplet (α, β, γ) de réels tel que $\alpha + \beta + \gamma = 1$ et tel que M est le barycentre du système $((A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma))$.)

On note A', respectivement B', C' l'intersection de la droite (AM) avec (BC), respectivement de la droite (BM) avec (AC), de la droite (CM) avec (AB). Montrer la relation :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1 .$$

Montrer inversement que si cette relation est satisfaite pour A', B', C' des points sur les droites (BC), (AC) et (AB) respectivement, alors les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

9. [Gramain] Dans $\mathbb{R}^2$ on considère les points $A = (a, 0)$, $B = (b, 0)$, $C = (c, 0)$, $A' = (0, a')$, $B' = (0, b')$ et $C' = (0, c')$.

a. Montrer que si (AB') est parallèle à $(A'B)$ et si (BC') est parallèle à $(B'C)$ alors (CA') est parallèle à $(C'A)$.

b. (Théorème de Papus) : Montrer que si les couples de droites $((BC'),(B'C))$, $((CA'),(C'A))$ et $((AB'),(A'B))$ sont concourants en des points U, V et W respectivement alors les points U, V et W sont alignés.