Licence L3 - option de géométrie **feuille 3** **17 novembre 2004**

Exercices autour du cours.

1. Soit f une application d'ensemble entre deux espaces affines. Montrer que f est affine si et seulement si f préserve le barycentre de tout système de points pondérés.

Exercices.

2. Dans $\mathbb{R}^2$ soient $O = (1, -2)$, $u = (1, 2)$ et $v = (1, 3)$. Quelles sont les coordonnées du points $(-1, -1)$ dans le repère cartésien (O, u, v) ? Quelle est l'équation cartésienne de la droite d'équation $2x+3y+4 = 0$ dans le repère (O, u, v) ?

3. [Gramain] Dans $\mathbb{R}^2$ on considère les points $A = (a, 0)$, $B = (b, 0)$, $C = (c, 0)$, $A' = (0, a')$, $B' = (0, b')$ et $C' = (0, c')$.

a. Montrer que si (AB') est parallèle à $(A'B)$ et si (BC') est parallèle à $(B'C)$ alors (CA') est parallèle à $(C'A)$.

b. (Théorème de Papus) : Montrer que si les couples de droites $((BC'), (B'C))$, $((CA'), (C'A))$ et $((AB'), (A'B))$ sont concourants en des points U, V et W respectivement alors les points U, V et W sont alignés.

4. Dans le plan euclidien. Montrer qu'un triangle ABC est rectangle en A si et seulement si on a $2AA' = BC$ où A' est le milieu de $[B, C]$. Quel est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC} = 0$?

5. Le théorème de Ceva. Dans le plan soient A, B, C trois points non alignés. Soit M un point du plan en position générale. Calculer en fonction des coordonnées barycentriques de M dans le repère (A, B, C) les coordonnées barycentrique dans ce même repère de l'intersection de la droite (AM) avec (BC).
On note A', respectivement B', C' l'intersection de la droite (AM) avec (BC), respectivement de la droite (BM) avec (AC), de la droite (CM) avec (AB). Montrer la relation :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1\ .$$

Montrer inversement que si cette relation est satisfaite pour A', B', C' des points sur les droites (BC), (AC) et (AB) respectivement, alors les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

6. Théorème de Menelaüs. Soient A, B, C trois points non alignés du plan, A' un point de (BC), B' un point de (AC) et C' un point de (AB) distincts des points A, B, C.

a. Montrer que A', B', C' sont alignés si et seulement si on a

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1\ .$$

(Considérer l'homothétie de centre A' qui transforme B en C et l'homothétie de centre B' qui transforme C en A.)

b. On suppose que les droites (AA'), (BB') et (CC') concourent en un point M. Retrouver la relation de Ceva en appliquant le théorème de Ménélaüs à la sécante BMB' du triangle $AA'C$ et à la sécante CMC' du triangle $AA'B$.

7. Centre du cercle circonscrit, centre de gravité et orthocentre d'un triangle.

a. Dans le plan euclidien, montrer que les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes.

b. On considère, toujours dans le plan euclidien, un triangle équilatéral ABC et un triangle quelconque $A'B'C'$. Montrer qu'il existe une application affine et une seule qui transforme A, B, C en A', B', C'. Déduire de ce qui précède que les trois médianes du triangle $A'B'C'$ sont concourantes.

c. Quel est l'image du point de concours des trois médiatrices de $A'B'C'$ par l'homothétie de centre le point de concours des trois médianes et de rapport $-\frac{2}{3}$?