Licence L3 - option géométrie **feuille 3** **27 octobre 2005**

1. Soient A, B, C, D quatre points distincts d'un espace affine. Montrer que A, B, C, D sont alignés si et seulement si A, B, C sont alignés et B, C, D sont alignés. Cela reste t-il vrai si on ne suppose plus les points A, B, C, D distincts ?

2. Soient a, b, c, d quatre réels et P l'ensemble des éléments (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $ax + by + cz + d = 0$.

a. Discuter suivant les valeurs de a, b, c, d la nature de P comme sous-ensemble de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

b. Soient a', b', c', d' quatre réels avec $(a', b', c') \neq (0, 0, 0)$. Soit P' le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $a'x + b'y + c'z + d' = 0$. A quelle condition sur a, b, c, d a t-on $P = P'$? $P \parallel P'$? $\dim(P \cap P') = 1$?

3. Soient A et B deux points distincts d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et M un point de la droite (AB). Quelle est la nature de l'ensemble des couples (α, β) de réels tels que M soit le barycentre des points pondérés $(A, \alpha), (B, \beta)$?

7. Soient A, B deux points distincts du plan, λ un réel distinct de 0 et 1, C le point tel que $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$.

a. Quel est l'ensemble E des triplets (α, β, γ) de $\mathbb{R}^3$ tels que A est le barycentre de $\{(B, \beta), (C, \gamma)\}$, B est le barycentre de $\{(C, \gamma), (A, \alpha)\}$ et C est le barycentre $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$?

b. Soit O un point du plan. Lorsque (α, β, γ) décrit E que peut-on dire du vecteur $\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}$?

4. *Le théorème de Ceva.* Dans le plan soient A, B, C trois points non alignés. Soit M un point du plan. Calculer en fonction des coordonnées barycentriques de M dans le repère (A, B, C) les coordonnées barycentrique dans ce même repère de l'intersection de la droite (AM) avec (BC). (Les coordonées barycentriques de M dans le repère (A, B, C) sont le triplet (α, β, γ) de réels tel que $\alpha + \beta + \gamma = 1$ et tel que M est le barycentre du système $((A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma))$.)

On note A', respectivement B', C' l'intersection de la droite (AM) avec (BC), respectivement de la droite (BM) avec (AC), de la droite (CM) avec (AB). Montrer la relation :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1 \ .$$

Montrer inversement que si cette relation est satisfaite pour A', B', C' des points sur les droites (BC), (AC) et (AB) respectivement, alors les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

5. [Gramain] Dans $\mathbb{R}^2$ on considère les points $A = (a, 0)$, $B = (b, 0)$, $C = (c, 0)$, $A' = (0, a')$, $B' = (0, b')$ et $C' = (0, c')$.

a. Montrer que si (AB') est parallèle à $(A'B)$ et si (BC') est parallèle à $(B'C)$ alors (CA') est parallèle à $(C'A)$.

b. (Théorème de Papus) : Montrer que si les couples de droites $((BC'), (B'C))$, $((CA'), (C'A))$ et $((AB'), (A'B))$ sont concourants en des points U, V et W respectivement alors les points U, V et W sont alignés.

6. Soient X, Y deux espaces affines non vide et $f : X \to Y$ une application affine bijective. Montrer que l'application réciproque $f^{-1} : Y \to X$ est affine.
Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ des applications affines. Montrer que la composée $g \circ f : X \to Z$ est affine.
Déduire de tout ceci que l'ensemble des applications affines bijectives d'un espace affine X dans lui même est un sous-groupe du groupe des bijections de X dans X.

7. Soient X, Y deux espaces affines non vide de dimension finie et $f : X \to Y$ une application affine de partie linéaire φ. Montrer les équivalences suivantes :

- f est injective $\Leftrightarrow$ φ est injective.

– f est surjective $\Leftrightarrow$ φ est surjective.

En déduire que f est bijective si et seulement si $\dim(X) = \dim(Y)$ et $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$.

8. Soient X un espace affine non vide et $f : X \to X$ une application affine de partie linéaire φ. Montrer que l'ensemble $\{M \in X, f(M) = M\}$ (l'ensemble des points fixes de f) est soit vide, soit un sous-espace affine de X de direction $\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})$. Montrer que si 1 n'est pas valeur propre de φ alors f admet un point fixe et un seul.

9. Soient X un espace affine non vide et $A_0, \ldots, A_n$ $n+1$ points de X. Soit H l'hyperplan de $\mathbb{R}^{n+1}$ formé des $(n+1)$-uplets $(x_0, \ldots, x_n)$ vérifiant $x_0 + \ldots + x_n = 1$.

a. Montrer que l'application $\Phi : H \to X$ qui associe à $(x_i) \in H$ le barycentre du système $((A_i, x_i))_{i \in \{0,\ldots,n\}}$ est une application affine. Montrer que cette application est bijective si et seulement si $(A_0, \ldots, A_n)$ est un repère affine de X.

b. On suppose que $(A_0, \ldots, A_n)$ est un repère affine de X. Soit Y un autre espace affine et $f : X \to Y$ une application. On note Ψ l'application $H \to Y$ qui associe à $(x_i) \in H$ le barycentre du système $((f(A_i), x_i))_{i \in \{0,\ldots,n\}}$. Montrer que si f est affine alors $f \circ \Phi = \Psi$. Montrer réciproquement que si f préserve les barycentres alors f est affine.

10. *Le théorème de Menelaüs.* Soient A, B, C trois points non alignés du plan, A' un point de (BC), B' un point de (AC) et C' un point de (AB) distincts des points A, B, C.

a. Montrer que A', B', C' sont alignés si et seulement si on a

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1 \ .$$

(Considérer l'homothétie de centre A' qui transforme B en C et l'homothétie de centre B' qui transforme C en A.)

b. On suppose que les droites (AA'), (BB') et (CC') concourent en un point M. Retrouver la relation de Ceva en appliquant le théorème de Ménélaüs à la sécante BMB' du triangle $AA'C$ et à la sécante CMC' du triangle $AA'B$.

11. *(Partiel de nov 2004)* Soit X un plan affine.

a. Soit $f : X \to X$ une homothétie de centre A de rapport $a \neq 1$. Soient M, N, P trois points non alignés. Montrer que deux au moins des droites $(Mf(M))$, $(Nf(N))$ et $(Pf(P))$ sont bien définies et sont non confondues. Montrer que leur intersection est $\{A\}$.

b. Supposons par exemple $M \neq f(M)$ et $N \notin (Mf(M))$. Montrer que $f(N)$ est l'intersection de la droite (AN) avec la parallèle à (MN) passant par $f(M)$.

c. Soient D et D' deux droites sécantes en un point A. Soient $B \neq C$ deux points de D distincts de A et B', C' deux points de D' distincts de A. On suppose que les droites (BB') et (CC') (bien définies !) sont parallèles. Montrer qu'il existe une unique homothétie de centre A transformant B en C. Quel est son rapport ? Montrer que cette homothétie transforme B' en C'. En déduire que les rapports $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ et $\dfrac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}}$ sont égaux (théorème de Thalès).

Montrer inversement que si ces rapports sont égaux alors les droites (BB') et (CC') sont parallèles.

d. Soient D, D' et D'' trois droites deux à deux distinctes, concourantes en un point A. Soient $B \neq C$ deux points de D distincts de A, B', C' deux points de D' distincts de A, B'', C'' deux points de D'' distincts de A. On suppose que (BB') est parallèle à (CC') et $(B'B'')$ est parallèle à $(C'C'')$. Montrer que (BB'') est parallèle à (CC'').