Licence L3 - option géométrie **feuille 3** **19 octobre 2006**

1. Soient X, Y deux espaces affines non vides de dimension finie (donnés comme sous-espaces affines d'espaces vectoriels E et F respectivement) et $f : X \to Y$ une application affine de partie linéaire φ. Montrer les équivalences suivantes :

- f est injective $\Leftrightarrow$ φ est injective.
- f est surjective $\Leftrightarrow$ φ est surjective.

En déduire que f est bijective si et seulement si $\dim(X) = \dim(Y)$ et $\operatorname{Ker}(\varphi) = \{0\}$.

2. Soient X un sous-espace affine non vide d'un espace vectoriel E et $A_0, \ldots, A_n$ $n+1$ points de X. Soit H l'hyperplan de $\mathbb{R}^{n+1}$ formé des $(n+1)$-uplets $(x_0, \ldots, x_n)$ vérifiant $x_0 + \ldots + x_n = 1$.

a. Montrer que l'application $\Phi : H \to X$ qui associe à $(x_i) \in H$ le barycentre du système $((A_i, x_i))_{i \in \{0,\ldots,n\}}$ est une application affine d'image le sous-espace affine engendré par les A_i. Montrer que cette application est injective si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n}$ sont linéairement indépendants.

b. On suppose que $(A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n})$ est un repère cartésien de X. Soit Y un sous-espace affine d'un espace vectoriel F et $f : X \to Y$ une application (entre ensembles). On note Ψ l'application $H \to Y$ qui associe à $(x_i) \in H$ le barycentre du système $((f(A_i), x_i))_{i \in \{0,\ldots,n\}}$. Montrer que si f est affine alors $f \circ \Phi = \Psi$. Montrer réciproquement que si f préserve les barycentres alors f est affine.

3. Soient X un espace affine non vide (donné comme sous-espace affine d'un espace vectoriel E) et $f : X \to X$ une application affine de partie linéaire φ. Montrer que l'ensemble $\{M \in X, f(M) = M\}$ (l'ensemble des points fixes de f) est soit vide, soit un sous-espace affine de X de direction $\operatorname{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})$. Montrer que si 1 n'est pas valeur propre de φ alors f admet un point fixe et un seul.

4. Soit f l'application $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 9x + 2y - 6z + 38 \\ 2x + 9y + 6z + 17 \\ -6x + 6y - 7z - 29 \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que f est affine et déterminer sa partie linéaire φ. f admet elle un point fixe ?

b. Montrer que le plan P d'équation $x - y + 3z + 3 = 0$ est stable par f et que la restriction de f à P est une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ à déterminer.

c. Montrer que l'application $g = t_{-\overrightarrow{u}} \circ f$ est une symétrie par rapport à P parallèlement à une direction à déterminer.

5. Soient X un espace affine non vide de dimension finie et $f : X \to X$ une application affine de partie linéaire φ. On suppose que les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})$ et $\operatorname{Im}(\varphi - \mathrm{Id})$ sont en somme directe. Montrer qu'il existe un unique vecteur $v \in \operatorname{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})$ et une unique application affine g possédant un point fixe tels que $f = t_v \circ g$. Montrer qu'on a $t_v \circ g = g \circ t_v$.

6. On rappelle (cf cours d'algèbre linéaire) que si E est un espace vectoriel et $\varphi : E \to E$ est une application linéaire vérifiant $\varphi^2 = \mathrm{Id}$ (on dit que φ est un idempotent) alors il existe F_+, F_- sous-espaces vectoriels de E stables par φ tels que $E = F_+ \oplus F_-$, la restriction de φ à F_+ est l'identité, la restriction de φ à F_- est $-\mathrm{Id}$.

Soient X un espace affine et $f : X \to X$ une application affine de partie linéaire φ.

a. On suppose $f^2 = \mathrm{Id}$. Montrer que f admet un point fixe (utiliser l'exercice précédent).

On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des points fixes de f et G le sous-espace vectoriel $\operatorname{Im}(\varphi - \mathrm{Id})$ de $\overrightarrow{X}$. Montrer que pour tout point M de X, $f(M)$ est caractérisé par les deux propriétés suivantes :

- Le vecteur $\overrightarrow{Mf(M)}$ est dans G.
- Le milieu du segment $[M, f(M)]$ est dans $\mathcal{F}$.

On dit que f est la symétrie par rapport à $\mathcal{F}$ parallèlement à G.

b. On suppose $\varphi^2 = \mathrm{Id}_{\overrightarrow{X}}$. A t-on $f^2 = \mathrm{Id}_X$?

7. *(Partiel de nov 2004)* Soit X le plan $\mathbb{R}^2$.

a. Soit $f : X \to X$ une homothétie de centre A de rapport $a \neq 1$. Soient M, N, P trois points non alignés. Montrer que deux au moins des droites $(Mf(M))$, $(Nf(N))$ et $(Pf(P))$ sont bien définies et sont non confondues. Montrer que leur intersection est $\{A\}$.

b. Supposons par exemple $M \neq f(M)$ et $N \notin (Mf(M))$. Montrer que $f(N)$ est l'intersection de la droite (AN) avec la parallèle à (MN) passant par $f(M)$.

c. Soient D et D' deux droites sécantes en un point A. Soient $B \neq C$ deux points de D distincts de A et B', C' deux points de D' distincts de A. On suppose que les droites (BB') et (CC') (bien définies !) sont parallèles. Montrer qu'il existe une unique homothétie de centre A transformant B en C. Quel est son rapport ? Montrer que cette homothétie transforme B' en C'. En déduire que les rapports $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ et $\dfrac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}}$ sont égaux (théorème de Thalès).

Montrer inversement que si ces rapports sont égaux alors les droites (BB') et (CC') sont parallèles.

d. Soient D, D' et D'' trois droites deux à deux distinctes, concourantes en un point A. Soient $B \neq C$ deux points de D distincts de A, B', C' deux points de D' distincts de A, B'', C'' deux points de D'' distincts de A. On suppose que (BB') est parallèle à (CC') et $(B'B'')$ est parallèle à $(C'C'')$. Montrer que (BB'') est parallèle à (CC'').

8. *Théorème de Desargues.* Dans le plan soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles sans sommet commun et dont les côtés sont parallèles deux à deux ((AB) est parallèle à $(A'B')$, etc.). Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles. (Utiliser une homothétie de centre le point de concours des droites (AA') et (BB') si celles-ci s'intersectent ou une translation sinon.)

9. *Le théorème de Menelaüs.* Soient A, B, C trois points non alignés du plan, A' un point de (BC), B' un point de (AC) et C' un point de (AB) distincts des points A, B, C.

a. Montrer que A', B', C' sont alignés si et seulement si on a

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1 .$$

(Considérer l'homothétie de centre A' qui transforme B en C et l'homothétie de centre B' qui transforme C en A.)

b. On suppose que les droites (AA'), (BB') et (CC') concourent en un point M. Retrouver la relation de Ceva en appliquant le théorème de Ménélaüs à la sécante BMB' du triangle $AA'C$ et à la sécante CMC' du triangle $AA'B$.

10. Soit X un espace affine non vide de dimension finie.

a. Montrer que la composée de deux homothéties-translations de X est une homothétie-translation.

b. Soit f une application affine injective $X \to X$. Montrer que f est une homothétie (de rapport $\neq 0$) ou une translation si et seulement si f transforme toute droite en une droite qui lui est parallèle

c. On suppose X de dimension 2. Soit f une application d'ensembles $X \to X$ telle que pour toute droite D de X, le sous-ensemble $f(D) \subset X$ est une droite parallèle à D. Montrer que f est une homothétie ou une translation.

d. Le résultat précédant est il toujours vrai en dimension ≥ 3.

11. Soient X un espace affine et f, g deux homothéties de X. Montrer que f et g commutent ($f \circ g = g \circ f$) si et seulement si f et g ont même centre. (Commencer par supposer que X est de dimension 1.)