Exercices autour du cours.

1. Composée de symétries centrales sur la droite affine.

On a vu que toute isométrie d'un espace affine euclidien de dimension n s'écrit comme la composée d'au plus $n+1$ symétries hyperplanes. Dans le cas de la droite un hyperplan est un sous-ensemble formé d'un point de la droite et une symétrie hyperplane est une symétrie centrale. Toute isométrie f d'une droite affine euclidienne D s'écrit $f = \mathrm{Id}$ (composée de 0 symétrie centrale) ou $f = s_A$ pour A un point de D ou $f = s_A \circ s_B$ pour A, B deux points de D ou $f = s_A \circ s_B \circ s_C$ pour A, B, C trois points de D. Observons qu'on n'a pas besoin de structure euclidienne pour parler de symétrie centrale : une symétrie centrale est exactement une homothétie de rapport -1. Par contre il faut une notion de distance pour parler d'isométrie. La distance nous est donnée par la structure euclidienne.

a. Montrer que pour A, B deux points de D, $s_A \circ s_B$ est la translation de vecteur $-2\overrightarrow{AB}$. En déduire qu'on a $s_A \circ s_B = s_C \circ s_D$ si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

b. Soient A un point de D et $\overrightarrow{u}$ un vecteur de $\overrightarrow{D}$. Montrer que $t_{\overrightarrow{u}} \circ s_A = s_{A+\frac{1}{2}\overrightarrow{u}}$, où $t_{\overrightarrow{u}}$ désigne la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. Que peut-on dire de $s_A \circ t_{\overrightarrow{u}}$?

c. Soient A, B, C trois points de D. Montrer que $s_A \circ s_B \circ s_C = s_{A'}$ pour un point A' à déterminer.

d. Montrer par récurrence que $s_{A_1} \circ \cdots \circ s_{A_n}$ est soit une symétrie centrale soit une translation suivant la parité de n.

e. Cas pratique : $D = \mathbb{R}$, $A_1 = 1$, $A_2 = \sqrt{2}$, $A_3 = -3$, $A_4 = 2$, $A_5 = 5$. Déterminer le centre de la symétrie $s_{A_1} \circ \cdots \circ s_{A_5}$.

2. Symétries et rotations vectorielles de $\mathbb{R}^2$.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est muni du produit scalaire canonique.

a. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et D_θ la droite vectoriel de $\mathbb{R}^2$ engendrée par le vecteur $(\cos\theta, \sin\theta)$. Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à D_θ (qu'on appelle aussi symétrie axiale d'axe D_θ et qu'on notera s_{D_θ}).

b. Montrer que la composée $s_{D_\theta} \circ s_{D_{\theta'}}$ est la rotation r_α de matrice $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ pour $\alpha = 2(\theta - \theta')$. En déduire qu'on a $s_{D_{\theta_1}} \circ s_{D_{\theta_2}} = s_{D_{\theta'_1}} \circ s_{D_{\theta'_2}}$ si et seulement si $\theta_1 - \theta_2 = \theta'_1 - \theta'_2$ modulo π.

c. Montrer qu'on a $r_\alpha \circ r_{\alpha'} = r_{\alpha+\alpha'}$. En déduire par récurrence que la composée d'un nombre pair de symétries axiales est une rotation.

d. Montrer que la composée $r_\alpha \circ s_{D_\theta}$ est la symétrie axiale d'axe $D_{\theta+\frac{1}{2}\alpha}$. Que peut-on dire de la composée $s_{D_\theta} \circ r_\alpha$?

e. Quelle est l'image de la droite D_θ par la rotation r_α ? Montrer que la composée $s_{r_\alpha(D_\theta)} \circ s_{r_\alpha(D_{\theta'})}$ ne dépend pas de α.

f. Cas pratique : $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_2 = 0$, $\theta_3 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_4 = 0$, $\theta_5 = \frac{\pi}{6}$. Déterminer l'axe de la symétrie $s_{D_{\theta_1}} \circ \cdots \circ s_{D_{\theta_5}}$.

3. Soient $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien, r une rotation de centre $O \in \mathcal{P}$ et d'angle α relativement à une base orthonormée de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. Comment change α si on choisit une autre base orthonormée de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$?

4. Composée de trois symétries axiales d'un plan affine eucldien $\mathcal{P}$.

a. Soient D, D' deux droites de $\mathcal{P}$ sécante en un point O. Montrer qu'il existe une rotation de centre O, d'angle disons α dans une base orthonomée de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ donnée, transformant D en D'. Quelles sont les autres rotations transformant D en D' ?

b. Montrer que la composée $s_D \circ s_{D'}$ est la rotation $r_{O,-2\alpha}$. Montrer que pour $\triangle, \triangle'$ deux autres droites de $\mathcal{P}$ on a $s_D \circ s_{D'} = s_\triangle \circ s_{\triangle'}$ si et seulement si il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\triangle = r_{O,\alpha}(D)$ et $\triangle' = r_{O,\alpha}(D')$.

c. Soient $\overrightarrow{u}$ un vecteur de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et D une droite de $\mathcal{P}$. Montrer que si $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{D}$ alors $t_{\overrightarrow{u}} \circ s_D = s_D \circ t_{\overrightarrow{u}}$.

Pour $\overrightarrow{u}$ quelconque on écrit $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$ avec $\overrightarrow{u_1} \in \overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{u_2} \in \overrightarrow{D}^{\perp}$. Montrer que $t_{\overrightarrow{u}} \circ s_D = t_{\overrightarrow{u_1}} \circ s_{D'} = s_{D'} \circ t_{\overrightarrow{u_1}}$ avec $D' = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{u_2}}(D)$. Que vaut $s_D \circ t_{\overrightarrow{u}}$?

d. Soient D, D', D'' trois droites de $\mathcal{P}$. Montrer que si D est parallèle à D' alors $s_D \circ s_{D'} \circ s_{D''} = t_{\overrightarrow{u}} \circ s_{\triangle}$ pour $\triangle$ une droite parallèle à D'' et $\overrightarrow{u}$ un vecteur de $\overrightarrow{D''}$. Que peut-on dire du cas D' parallèle à D'' ?

e. On suppose D et D' sécantes en un point O. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $r_{O,\alpha}(D')$ soit parallèle à D''. En déduire qu'on a $s_D \circ s_{D'} \circ s_{D''} = t_{\overrightarrow{u}} \circ s_{\triangle}$ pour $\triangle$ une droite parallèle à $r_{O,\alpha}(D)$ et $\overrightarrow{u}$ un vecteur de $\overrightarrow{\triangle}$.

5. Composée de deux rotations d'un plan affine euclidien $\mathcal{P}$.

Soient r, r' deux rotations de $\mathcal{P}$ de centre O et O' respectivement. Montrer qu'il existe des droites D_1, D_2 et D_3 de $\mathcal{P}$ avec $O, O' \in D_2$, $r = s_{D_1} \circ s_{D_2}$ et $r' = s_{D_2} \circ s_{D_3}$. En déduire que $r \circ r'$ est une translation si D_1 est parallèle à D_3, un rotation dont on déterminera le centre sinon.

Exercices.

6. Soient $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien et A, B, C, D quatre points de $\mathcal{P}$. A quelle condition sur ces quatre points existe t-il une rotation r telle que $r(A) = C$ et $r(B) = D$?

7. Soit r une rotation d'un plan affine euclidien. Comment peut on déterminer à la règle et au compas le centre de cette rotation ?

8. Soit f un anti-déplacement d'un plan affine euclidien. f s'écrit alors comme la composée d'une symétrie axiale avec une translation parallèlement à l'axe de la symétrie. Comment peut on déterminer à la règle et au compas cet axe ?