Licence L3 - option géométrie **feuille 4** **24 novembre 2005**

1. Soient X un espace affine non vide de dimension $n \geq 2$, H_1, H_2, H_3 trois hyperplans affines parallèles entre eux et distincts, D et D' deux droites dont la direction n'est pas incluse dans celle de H_1.

a. Montrer que chacune des droites D et D' intersectent les hyperplans H_1, H_2, H_3 en des points qu'on notera A_1, A_2, A_3 et A'_1, A'_2, A'_3 respectivement.

b. Montrer qu'on a $\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1A_3}} = \frac{\overline{A'_1A'_2}}{\overline{A'_1A'_3}}$.

(Considérer une projection affine sur D' et sa restriction à D.

2. *Théorème de Desargues.* Dans le plan soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles sans sommet commun et dont les côtés sont parallèles deux à deux ((AB) est parallèle à $(A'B')$, etc.). Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles. (Utiliser une homothétie de centre le point de concours des droites (AA') et (BB') si celles-ci s'intersectent ou une translation sinon.)

3. Soit X un espace affine non vide de dimension finie.

a. Montrer que la composée de deux homothéties-translations de X est une homothétie-translation.

b. Soit f une application affine injective $X \to X$. Montrer que f est une homothétie (de rapport $\neq 0$) ou une translation si et seulement si f transforme toute droite en une droite qui lui est parallèle

c. On suppose X de dimension 2. Soit f une application d'ensembles $X \to X$ telle que pour toute droite D de X, le sous-ensemble $f(D) \subset X$ est une droite parallèle à D. Montrer que f est une homothétie ou une translation. (Utiliser l'exercice 11 de la feuille 3.)

d. Le résultat précédant est il toujours vrai en dimension ≥ 3.

4. Soient X un espace affine et f, g deux homothéties de X. Montrer que f et g commutent ($f \circ g = g \circ f$) si et seulement si f et g ont même centre. (Commencer par supposer que X est de dimension 1.)

5. Soient X un espace affine non vide de dimension finie et $f : X \to X$ une application affine de partie linéaire φ. On suppose que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{Id})$ sont en somme directe. Montrer qu'il existe un unique vecteur $v \in \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})$ et une unique application affine g possédant un point fixe tels que $f = t_v \circ g$. Montrer qu'on a $t_v \circ g = g \circ t_v$.

6. On rappelle (cf cours d'algèbre linéaire) que si E est un espace vectoriel et $\varphi : E \to E$ est une application linéaire vérifiant $\varphi^2 = \mathrm{Id}$ (on dit que φ est un idempotent) alors il existe F_+, F_- sous-espaces vectoriels de E stables par φ tels que $E = F_+ \oplus F_-$, la restriction de φ à F_+ est l'identité, la restriction de φ à F_- est $-\mathrm{Id}$.

Soient X un espace affine et $f : X \to X$ une application affine de partie linéaire φ.

a. On suppose $f^2 = \mathrm{Id}$. Montrer que f admet un point fixe (utiliser l'exercice précédent).

On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des points fixes de f et G le sous-espace vectoriel $\mathrm{Im}(\varphi + \mathrm{Id})$ de $\overrightarrow{X}$. Montrer que pour tout point M de X, $f(M)$ est caractérisé par les deux propriétés suivantes :

- Le vecteur $\overrightarrow{Mf(M)}$ est dans G.
- Le milieu du segment $[M, f(M)]$ est dans $\mathcal{F}$.

On dit que f est la symétrie par rapport à $\mathcal{F}$ parallèlement à G.

b. On suppose $\varphi^2 = \mathrm{Id}_{\overrightarrow{X}}$. A t-on $f^2 = \mathrm{Id}_X$?

7. Soit f l'application $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 9x + 2y - 6z + 38 \\ 2x + 9y + 6z + 17 \\ -6x + 6y - 7z - 29 \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que f est affine et déterminer sa partie linéaire φ. f admet elle un point fixe ?

b. Montrer que le plan P d'équation $x - y + 3z + 3 = 0$ est stable par f et que la restriction de f à P est une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ à déterminer.

c. Montrer que l'application $g = t_{-\overrightarrow{u}} \circ f$ est une symétrie par rapport à P parallèlement à une direction à déterminer.