1. Soient A_1, A_2, A_3 trois points non alignés du plan $\mathbb{R}^2$.

a. Montrer que tout point M du plan est le barycentre du système $((A_1, \alpha), (A_2, \beta), (A_3, \gamma))$ pour un unique triplet (α, β, γ) de réels vérifiants $\alpha+\beta+\gamma = 1$. On appelle (α, β, γ) les coordonnées barycentriques de M relativement à (A_1, A_2, A_3).

b. Soient A, B, C trois points du plan de coordonnées barycentriques (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) et (c_1, a_2, a_3) respectivement. Montrer que les points A, B, C sont alignés si et seulement si la matrice

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

est de rang inférieur ou égal à 2. Que se passe t-il si la matrice est de rang 1 ?
Déduire de ce qui précède, lorsque A est distinct de B, une équation (en coordonnées barycentriques) de la droite (AB). Quel est le lien avec l'équation cartésienne de la droite (AB) dans le repère $(A_1, \overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3})$?

c. On se donne maintenant quatre points non coplanaires A_1, A_2, A_3, A_4 de $\mathbb{R}^3$. Comment traduit on en coordonnées barycentriques relativement à ces quatre points le fait que trois points A, B, C sont alignés ? que quatre points A, B, C, D sont coplanaires ?

2. a. Montrer que la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est un produit scalaire *(On pourra diagonaliser A et donner l'expression de la forme bilinéaire en coordonnées dans une base de vecteurs propres.)*

b. Calculer la distance du point $(1, 2)$ à la droite d'équation $x + y + 1 = 0$ pour la distance euclidienne associée à la forme bilinéaire ci-dessus. *(On pourra par exemple commencer par chercher un point M de la droite tel que le vecteur $\overrightarrow{(1,2)M}$ soit orthogonal pour la forme bilinéaire donnée à un vecteur directeur de la droite. On peut aussi se ramener à la minimisation d'une application $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$.)*

c. Montrer que l'application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + xy + 2y^2$ coïncide avec $(x, y) \mapsto \|(x, y)\|^2$ pour une norme euclidienne $\| - \|$ sur $\mathbb{R}^2$, mais pas $(x, y) \mapsto 2x^2 + xy$.

3. On considère $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique. Soient A et B deux points distincts.

a. Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par A. Montrer que le projeté orthogonal de B sur $\mathcal{D}$ appartient au cercle de diamètre $[AB]$.

b. Montrer que l'application qui à $\mathcal{D}$ associe le projeté orthogonal de B sur $\mathcal{D}$ est une bijection de l'ensemble des droites passant par A sur le cercle de diamètre $[AB]$.

4. On considère $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique et A, B deux point distincts. Montrer que la distance d'un point M à la droite (AB) s'exprime simplement en terme de $\|\overrightarrow{AB}\|$ et de la valeur absolue du déterminant de la famille de vecteurs $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB})$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Interpréter ce résultat en terme d'aire d'un parallélogramme.
Trouver un résultat analogue pour la distance dans $\mathbb{R}^3$ d'un point au plan passant par trois points non alignés.

5. Soient E un espace vectoriel euclidien, F un sous-espace affine de E et $(O, e_1, \ldots, e_n)$ un repère orthonormé de F. Montrer que les coordonnées dans ce repère du projeté orthogonal d'un point M de E sur F sont données par $((\overrightarrow{OM}|e_1), \ldots, (\overrightarrow{OM}|e_n))$

6. Soient a, b, c, d quatre réels avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et soit P le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $ax+by+cz+d = 0$. Déterminer les coordonées du projeté orthogonal de A sur P. En déduire la distance de A à P en fonction de a, b, c, d.

7. *Distance d'un point à une droite de $\mathbb{R}^3$ (Examen septembre 2005)*

$\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire canonique. Soit D la droite de $\mathbb{R}^3$ donnée par les équations $x+y+2z+2=0$ et $x-y+3z+3=0$. Soit A le point $(1,1,1)$. On propose deux méthodes pour calculer la distance de A à D.

Première méthode

a. Exhiber (en donnant les coordonnées) un point B de D et un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de D.

b. Montrer que l'application $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ qui à un réel t associe la distance du point A au point $B_t = B + t\overrightarrow{u}$ atteint son minimum en un réel t_0 à déterminer. Quelle est la distance de A à D ?

c. Que peut on dire du vecteur $\overrightarrow{AB_{t_0}}$ par rapport à D ? (Justifier.)

Deuxième méthode

d. Montrer que pour tout réel α le système

$$\begin{cases} x+y+2z+2+\alpha(x-y+3z+3)=0 \\ x-y+3z+3=0 \end{cases}$$

est un système d'équations cartésiennes de D.

e. Déterminer α tel que le plan P_α d'équation $x+y+2z+2+\alpha(x-y+3z+3)=0$ soit orthogonal au plan P d'équation $x-y+3z+3=0$. On notera α_0 la valeur de α trouvée.

On note A_P, respectivement $A_{P_{\alpha_0}}$, le projeté orthogonal de A sur P, respectivement sur P_{α_0}. On note enfin A' le projeté orthogonal de A_P sur P_{α_0}.

f. Montrer qu'on a $A' \in D$. Montrer que pour tout point M de D on a la relation $AM^2 = (AA_P)^2 + (A_PA')^2 + A'M^2$. En déduire que A' est aussi le projeté orthogonal de A sur D.

g. Montrer qu'on a les relations $(AA_P)^2 + (A_PA')^2 = (AA_{P_{\alpha_0}})^2 + (A_{P_{\alpha_0}}A')^2$ et $(AA_P)^2 + (AA_{P_{\alpha_0}})^2 = (A_PA')^2 + (A'A_{P_{\alpha_0}})^2$. En déduire $(AA')^2 = (AA_P)^2 + (AA_{P_{\alpha_0}})^2$. Qu'obtient-on pour la distance de A à D ? (Utiliser l'exercice 6.)

8. Centre du cercle circonscrit, centre de gravité et orthocentre d'un triangle.

a. Dans le plan euclidien, montrer que les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes.

b. On considère, toujours dans le plan euclidien, un triangle équilatéral ABC et un triangle quelconque $A'B'C'$. Montrer qu'il existe une application affine et une seule qui transforme A, B, C en A', B', C'. Déduire de ce qui précède que les trois médianes du triangle $A'B'C'$ sont concourantes.

c. Montrer qu'une homothétie de rapport non nul transforme deux droites orthogonales en deux droites orthogonales.

d. Quel est l'image du point de concours des trois médiatrices de $A'B'C'$ par l'homothétie de centre le point de concours des trois médianes et de rapport -2 ?