**Licence L3 - option géométrie** **feuille 5** **8 décembre 2005**

**1.** Soient $X$ un espace affine euclidien et $A, B, C$ trois points de $X$. Montrer qu'on a $BC^2 = AB^2 + AC^2$ si et seulement si le triangle $ABC$ est rectangle en $A$.

**2.** Soient $a, b, c, d$ quatre réels avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et soit $P$ le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $ax+by+cz+d = 0$. Déterminer les coordonées du projeté orthogonal de $A$ sur $P$. En déduire la distance de $A$ à $P$ en fonction de $a, b, c, d$.

**3.** Centre du cercle circonscrit, centre de gravité et orthocentre d'un triangle.

a. Dans le plan euclidien, montrer que les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes.

b. On considère, toujours dans le plan euclidien, un triangle équilatéral $ABC$ et un triangle quelconque $A'B'C'$. Montrer qu'il existe une application affine et une seule qui transforme $A, B, C$ en $A', B', C'$. Déduire de ce qui précède que les trois médianes du triangle $A'B'C'$ sont concourantes.

c. Quel est l'image du point de concours des trois médiatrices de $A'B'C'$ par l'homothétie de centre le point de concours des trois médianes et de rapport $-2$ ?

**4.** *Distance entre deux droites de $\mathbb{R}^3$ (Partiel novembre 2004) Cf l'exercice 9 de la feuille 2.*
On considère $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. On rappelle que la distance entre deux sous-espaces affines non vides $F, G$ d'un espace vectoriel euclidien $E$ est définie comme la borne inférieure du sous-ensemble $\{\|\overrightarrow{MN}\|, M \in F, N \in G\}$ de $\mathbb{R}_+$.

**a.** Soient $P$ un plan affine de $\mathbb{R}^3$ et $A$ un point de $\mathbb{R}^3$ n'appartenant pas à $P$. Montrer l'existence et l'unicité d'un point $A_P$ de $P$ tel que $\overrightarrow{AA_P}$ est orthogonal à $P$. On appelle $A_P$ le projeté orthogonal de $A$ sur $P$. Montrer que la distance de $A$ à $P$ est égale à $\|\overrightarrow{AA_P}\|$.

**b.** Soit $D$ une droite passant par $A$ et parallèle à $P$. Montrer que lorsque $M$ décrit $D$ le projeté orthogonal $M_P$ de $M$ sur $P$ décrit une droite incluse dans $P$ et parallèle à $D$. Montrer que la distance de $M$ à $P$ ne dépend pas du choix de $M \in D$. Que peut on dire de la distance entre une droite passant par $A$ et $P$ suivant la position de cette droite par rapport à $P$ ?

Soient $(u, v, w)$ une base de $\mathbb{R}^3$, $A$ un point de $\mathbb{R}^3$, $D$ la droite passant par $A$ de vecteur directeur $u$ et $D'$ la droite passant par $A + w$ de vecteur directeur $v$.

**c.** Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on note $M_\lambda$ le point $A + w + \lambda v$ et $P_\lambda$ le plan passant par $M_\lambda$ et contenant $D$. Montrer que lorsque $\lambda$ décrit $\mathbb{R}$, $P_\lambda$ décrit tous les plans contenant $D$ sauf un qu'on notera $P_\infty$. Déterminer la direction de $P_\infty$ en fonction de $u$, $v$ et $w$. La distance de $D'$ à $P_\infty$ est elle nulle ? Que peut on en déduire sur la distance de $D'$ à $D$ ?

**d.** On note $D'_{P_\infty}$ la droite formée des projetés orthogonaux des points de $D'$ sur $P_\infty$ (Cf la question b). Montrer que les droites $D$ et $D'_{P_\infty}$ sont sécantes en un point $N_{P_\infty}$.

Soit $N$ le point de $D'$ dont $N_{P_\infty}$ est le projeté orthogonal sur $P$. Montrer que pour tout point $M$ de $D$ et pour tout point $M'$ de $D'$ on a $MM' \geq NN_{P_\infty}$. En déduire $\mathrm{d}(D, D') = NN_{P_\infty}$.

**e.** Soit $\overrightarrow{n}$ un vecteur non nul orthogonal à $u$ et à $v$. Soient $M$ un point de $D$ et $M'$ un point de $D'$. Montrer que la valeur absolue du produit scalaire $\overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{n}$ est égale à $\mathrm{d}(D, D') \cdot \|\overrightarrow{n}\|$.

**f.** Cas concret : On prend $A = (0, 0, 0)$, $u = (1, 0, 1)$, $v = (1, 2, 1)$ et $w = (1, 2, 3)$. Calculer la distance de $D$ à $D'$.

**5.** *Distance d'un point à une droite de $\mathbb{R}^3$ (Examen septembre 2005)*

$\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire canonique. Soit $D$ la droite de $\mathbb{R}^3$ donnée par les équations $x+y+2z+2 = 0$ et $x - y + 3z + 3 = 0$. Soit $A$ le point $(1, 1, 1)$. On propose deux méthodes pour calculer la distance de $A$ à $D$.

*Première méthode*

**a.** Exhiber (en donnant les coordonnées) un point $B$ de $D$ et un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de $D$.

**b.** Montrer que l'application $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ qui à un réel $t$ associe la distance du point $A$ au point $B_t = B + t\overrightarrow{u}$ atteint son minimum en un réel $t_0$ à déterminer. Quelle est la distance de $A$ à $D$ ?

**c.** Que peut on dire du vecteur $\overrightarrow{AB_{t_0}}$ par rapport à $D$ ? (Justifier.)

*Deuxième méthode*

**d.** Montrer que pour tout réel $\alpha$ le système

$$\begin{cases} x + y + 2z + 2 + \alpha(x - y + 3z + 3) = 0 \\ x - y + 3z + 3 = 0 \end{cases}$$

est un système d'équations cartésiennes de $D$.

**e.** Déterminer $\alpha$ tel que le plan $P_\alpha$ d'équation $x + y + 2z + 2 + \alpha(x - y + 3z + 3) = 0$ soit orthogonal au plan $P$ d'équation $x - y + 3z + 3 = 0$. On notera $\alpha_0$ la valeur de $\alpha$ trouvée.

On note $A_P$, respectivement $A_{P_{\alpha_0}}$, le projeté orthogonal de $A$ sur $P$, respectivement sur $P_{\alpha_0}$. On note enfin $A'$ le projeté orthogonal de $A_P$ sur $P_{\alpha_0}$.

**f.** Montrer qu'on a $A' \in D$. Montrer que pour tout point $M$ de $D$ on a la relation $AM^2 = (AA_P)^2 + (A_PA')^2 + A'M^2$. En déduire que $A'$ est aussi le projeté orthogonal de $A$ sur $D$.

**g.** Montrer qu'on a les relations $(AA_P)^2 + (A_PA')^2 = (AA_{P_{\alpha_0}})^2 + (A_{P_{\alpha_0}}A')^2$ et $(AA_P)^2 + (AA_{P_{\alpha_0}})^2 = (A_PA')^2 + (A'A_{P_{\alpha_0}})^2$. En déduire $(AA')^2 = (AA_P)^2 + (AA_{P_{\alpha_0}})^2$. Qu'obtient-on pour la distance de $A$ à $D$ ? (Utiliser l'exercice 2.)

**6.** Composée de symétries centrales sur la droite affine.

*On a vu que toute isométrie d'un espace affine euclidien de dimension $n$ s'écrit comme la composée d'au plus $n+1$ symétries hyperplanes. Dans le cas de la droite un hyperplan est un sous-ensemble formé d'un point de la droite et une symétrie hyperplane est une symétrie centrale. Toute isométrie $f$ d'une droite affine euclidienne $D$ s'écrit $f = \mathrm{Id}$ (composée de 0 symétrie centrale) ou $f = s_A$ pour $A$ un point de $D$ ou $f = s_A \circ s_B$ pour $A, B$ deux points de $D$.*

**a.** Montrer que pour $A, B$ deux points de $D$, $s_A \circ s_B$ est la translation de vecteur $-2\overrightarrow{AB}$. En déduire qu'on a $s_A \circ s_B = s_C \circ s_D$ si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

**b.** Soient $A$ un point de $D$ et $\overrightarrow{u}$ un vecteur de $\overrightarrow{D}$. Montrer que $t_{\overrightarrow{u}} \circ s_A = s_{A+\frac{1}{2}\overrightarrow{u}}$, où $t_{\overrightarrow{u}}$ désigne la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. Que peut-on dire de $s_A \circ t_{\overrightarrow{u}}$ ?

**c.** Soient $A, B, C$ trois points de $D$. Montrer que $s_A \circ s_B \circ s_C = s_{A'}$ pour un point $A'$ à déterminer.

**d.** Montrer par récurrence que $s_{A_1} \circ \cdots \circ s_{A_n}$ est soit une symétrie centrale soit une translation suivant la parité de $n$.

**e.** Cas pratique : $D = \mathbb{R}$, $A_1 = 1$, $A_2 = \sqrt{2}$, $A_3 = -3$, $A_4 = 2$, $A_5 = 5$. Déterminer le centre de la symétrie $s_{A_1} \circ \cdots \circ s_{A_5}$.

**7.** *(Examen septembre 2005)* $\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire canonique. Soit $f$ l'application $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 9x + 2y - 6z + 38 \\ 2x + 9y + 6z + 17 \\ -6x + 6y - 7z - 29 \end{pmatrix}.$$

Montrer que la matrice

$$\frac{1}{11} \begin{pmatrix} 9 & 2 & -6 \\ 2 & 9 & 6 \\ -6 & 6 & -7 \end{pmatrix}$$

est orthogonale. En déduire que $f$ est une isométrie.

**8.** *(Examen janvier 2005)* $\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire canonique. Soit $P \subset \mathbb{R}^3$ le plan d'équation $x + 2y + 3z = 4$. On note $s_P$ la symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^3$ par rapport à $P$.

**a.** Déterminer les coordonnées de l'image du point $(0, 0, 0)$ par $s_P$. $s_P$ est elle une application linéaire ?

**b.** Déterminer l'image par $s_P$ de la droite passant par le point $(0, 0, 0)$ et de vecteur directeur $(1, 2, 3)$ (justifier le calcul).

**c.** Soit $P' \subset \mathbb{R}^3$ le plan d'équation $x + 2y + 3z = 0$. Que peut on dire de $P'$ par rapport à $P$ ? Que peut on dire de la composée $s_P \circ s_{P'}$ ?

**9.** Soient $A, B$ deux points du plan euclidien $\mathcal{P}$ et $\alpha, \beta$ deux réels. Etudier l'application $\varphi : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, $M \mapsto \alpha MA^2 + \beta MB^2$. Quel est la nauture de l'image réciproque par $\varphi$ d'un réel donné ?