1. Composée de symétries centrales sur la droite affine.

On a vu que toute isométrie d'un espace affine euclidien de dimension n s'écrit comme la composée d'au plus $n+1$ symétries hyperplanes. Dans le cas de la droite un hyperplan est un sous-ensemble formé d'un point de la droite et une symétrie hyperplane est une symétrie centrale. Toute isométrie f d'une droite affine euclidienne D s'écrit $f = \mathrm{Id}$ (composée de 0 symétrie centrale) ou $f = s_A$ pour A un point de D ou $f = s_A \circ s_B$ pour A, B deux points de D.

a. Montrer que pour A, B deux points de D, $s_A \circ s_B$ est la translation de vecteur $-2\overrightarrow{AB}$. En déduire qu'on a $s_A \circ s_B = s_C \circ s_D$ si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

b. Soient A un point de D et $\overrightarrow{u}$ un vecteur de $\overrightarrow{D}$. Montrer que $t_{\overrightarrow{u}} \circ s_A = s_{A+\frac{1}{2}\overrightarrow{u}}$, où $t_{\overrightarrow{u}}$ désigne la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. Que peut-on dire de $s_A \circ t_{\overrightarrow{u}}$?

c. Soient A, B, C trois points de D. Montrer que $s_A \circ s_B \circ s_C = s_{A'}$ pour un point A' à déterminer.

d. Montrer par récurrence que $s_{A_1} \circ \cdots \circ s_{A_n}$ est soit une symétrie centrale soit une translation suivant la parité de n.

e. Cas pratique : $D = \mathbb{R}$, $A_1 = 1$, $A_2 = \sqrt{2}$, $A_3 = -3$, $A_4 = 2$, $A_5 = 5$. Déterminer le centre de la symétrie $s_{A_1} \circ \cdots \circ s_{A_5}$.

2. *Points fixes des isométries*

a. Soit θ un réel non congru à 0 modulo 2π. Soit A un point de $\mathbb{R}^2$. Montrer que A est le seul point fixe de la rotation de $\mathbb{R}^2$ de centre A d'angle θ.

b. Soit D une droite de $\mathbb{R}^2$. Montrer que l'ensemble des points fixes de la symétrie orthogonale par rapport à D (s_D) est D.

c. Soient D et D' deux droites de $\mathbb{R}^2$ sécantes en un point A. Montrer que A est le seul point fixe de la composée $s_D \circ s_{D'}$. Que se passe t-il si $D = D'$? si D et D' sont disjointes ?

d. Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans non parallèles de $\mathbb{R}^3$. Montrer que l'ensemble des points fixes de la composée $s_{\mathcal{P}} \circ s_{\mathcal{P}'}$ est une droite. Que se passe t-il si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles ?

3. *Symétries et rotations vectorielles de* $\mathbb{R}^2$ — L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est muni du produit scalaire canonique.

a. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et D_θ la droite vectoriel de $\mathbb{R}^2$ engendrée par le vecteur $(\cos\theta, \sin\theta)$. Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à D_θ (qu'on appelle aussi symétrie axiale d'axe D_θ et qu'on notera s_{D_θ}).

b. Montrer que la composée $s_{D_\theta} \circ s_{D_{\theta'}}$ est la rotation r_α de matrice $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ pour $\alpha = 2(\theta - \theta')$. En déduire qu'on a $s_{D_{\theta_1}} \circ s_{D_{\theta_2}} = s_{D_{\theta'_1}} \circ s_{D_{\theta'_2}}$ si et seulement si $\theta_1 - \theta_2 = \theta'_1 - \theta'_2$ modulo π.

c. Montrer qu'on a $r_\alpha \circ r_{\alpha'} = r_{\alpha+\alpha'}$. En déduire par récurrence que la composée d'un nombre pair de symétries axiales est une rotation.

d. Montrer que la composée $r_\alpha \circ s_{D_\theta}$ est la symétrie axiale d'axe $D_{\theta+\frac{1}{2}\alpha}$. Que peut-on dire de la composée $s_{D_\theta} \circ r_\alpha$?

e. Quelle est l'image de la droite D_θ par la rotation r_α ? Montrer que la composée $s_{r_\alpha(D_\theta)} \circ s_{r_\alpha(D_{\theta'})}$ ne dépend pas de α.

f. Cas pratique : $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_2 = 0$, $\theta_3 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_4 = 0$, $\theta_5 = \frac{\pi}{6}$. Déterminer l'axe de la symétrie $s_{D_{\theta_1}} \circ \cdots \circ s_{D_{\theta_5}}$.

4. *Composée d'une rotation et d'une translation – (Examen de janvier 2004)* — $\mathbb{R}^2$ est muni du produit scalaire canonique. Soient α un réel et r_α la rotation vectorielle de matrice $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On suppose que α n'est pas un multiple entier de 2π. Soient $\overrightarrow{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ et $t_{\overrightarrow{u}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.

a. Montrer que l'application composée $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ r_\alpha$ admet un et un seul point fixe. En déduire que f est une rotation de $\mathbb{R}^2$ d'angle α relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Construction du centre de f — Soient D et D' deux droites de $\mathbb{R}^2$. On sait que $t_{\overrightarrow{u}}$ est égale à la composée $s_D \circ s_{D'}$ pourvu que $\overrightarrow{u}$ soit orthogonal à D et que $D' = t_{-\frac{1}{2}\overrightarrow{u}}(D)$. De même r_α est égal à la composée $s_D \circ s_{D'}$ pourvu que D passe par le centre de r_α et que $D' = r_{-\frac{1}{2}\alpha}(D)$.

b. Montrer qu'on peut choisir trois droites D, D', D'' telles que $t_{\overrightarrow{u}} = s_D \circ s_{D'}$ et $r_\alpha = s_{D'} \circ s_{D''}$.

c. Comment s'exprime le centre la rotation $t_{\overrightarrow{u}} \circ r_\alpha$ en fonction de D, D' et D''.

5. *(Examen septembre 2005)* $\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire canonique. Soit f l'application $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 9x + 2y - 6z + 38 \\ 2x + 9y + 6z + 17 \\ -6x + 6y - 7z - 29 \end{pmatrix} .$$

Montrer que la matrice

$$\frac{1}{11} \begin{pmatrix} 9 & 2 & -6 \\ 2 & 9 & 6 \\ -6 & 6 & -7 \end{pmatrix}$$

est orthogonale. En déduire que f est une isométrie.

6. *(Examen janvier 2005)* $\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire canonique. Soit $P \subset \mathbb{R}^3$ le plan d'équation $x + 2y + 3z = 4$. On note s_P la symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^3$ par rapport à P.

a. Déterminer les coordonnées de l'image du point $(0, 0, 0)$ par s_P. s_P est elle une application linéaire ?

b. Déterminer l'image par s_P de la droite passant par le point $(0, 0, 0)$ et de vecteur directeur $(1, 2, 3)$ (justifier le calcul).

c. Soit $P' \subset \mathbb{R}^3$ le plan d'équation $x + 2y + 3z = 0$. Que peut on dire de P' par rapport à P ? Que peut on dire de la composée $s_P \circ s_{P'}$?

7. *Symétrie plane de* $\mathbb{R}^3$ *(examen janvier 2006)*
On considère $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. Soit $P \subset \mathbb{R}^3$ le plan d'équation $x - y + z - 1 = 0$. On note s la symétrie orthogonale par rapport à P.

a. Quelle est la distance du point $(0, 0, 0)$ à P ? Quelle est la distance du point $(0, 0, 0)$ à son image par s ? L'application s est elle linéaire ?

b. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la partie linéaire de s.

c. On considère la droite D passant par le point $A = (0, 0, 0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = (2, -1, 1)$. Déterminer la droite image de D par s. La droite $s(D)$ est-elle confondue avec D ?

d. Pour M un point de $\mathbb{R}^3$ et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ on note $D_{M,\overrightarrow{u}}$ la droite passant par M et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\overrightarrow{u}$ pour qu'on ait $s(D_{M,\overrightarrow{u}}) = D_{M,\overrightarrow{u}}$.

e. Si la condition ci-dessus est satisfaite, que peut-on dire de la restriction à $D_{M,\overrightarrow{u}}$ de s ?