Licence L3 - option géométrie **feuille 6** **15 décembre 2005**

1. *Symétries et rotations vectorielles de* $\mathbb{R}^2$ — L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est muni du produit scalaire canonique.

a. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et D_θ la droite vectoriel de $\mathbb{R}^2$ engendrée par le vecteur $(\cos\theta, \sin\theta)$. Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à D_θ (qu'on appelle aussi symétrie axiale d'axe D_θ et qu'on notera s_{D_θ}).

b. Montrer que la composée $s_{D_\theta} \circ s_{D_{\theta'}}$ est la rotation r_α de matrice $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ pour $\alpha = 2(\theta - \theta')$. En déduire qu'on a $s_{D_{\theta_1}} \circ s_{D_{\theta_2}} = s_{D_{\theta'_1}} \circ s_{D_{\theta'_2}}$ si et seulement si $\theta_1 - \theta_2 = \theta'_1 - \theta'_2$ modulo π.

c. Montrer qu'on a $r_\alpha \circ r_{\alpha'} = r_{\alpha+\alpha'}$. En déduire par récurrence que la composée d'un nombre pair de symétries axiales est une rotation.

d. Montrer que la composée $r_\alpha \circ s_{D_\theta}$ est la symétrie axiale d'axe $D_{\theta+\frac{1}{2}\alpha}$. Que peut-on dire de la composée $s_{D_\theta} \circ r_\alpha$?

e. Quelle est l'image de la droite D_θ par la rotation r_α ? Montrer que la composée $s_{r_\alpha(D_\theta)} \circ s_{r_\alpha(D_{\theta'})}$ ne dépend pas de α.

f. Cas pratique : $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_2 = 0$, $\theta_3 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_4 = 0$, $\theta_5 = \frac{\pi}{6}$. Déterminer l'axe de la symétrie $s_{D_{\theta_1}} \circ \cdots \circ s_{D_{\theta_5}}$.

2. *Composée d'une rotation et d'une translation – (Examen de janvier 2004)* — $\mathbb{R}^2$ est muni du produit scalaire canonique. Soient α un réel et r_α la rotation vectorielle de matrice $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On suppose que α n'est pas un multiple entier de 2π. Soient $\overrightarrow{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ et $t_{\overrightarrow{u}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.

a. Montrer que l'application composée $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ r_\alpha$ admet un et un seul point fixe. En déduire que f est une rotation de $\mathbb{R}^2$ d'angle α relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Construction du centre de f — Soient D et D' deux droites de $\mathbb{R}^2$. On sait que $t_{\overrightarrow{u}}$ est égale à la composée $s_D \circ s_{D'}$ pourvu que $\overrightarrow{u}$ soit orthogonal à D et que $D' = t_{-\frac{1}{2}\overrightarrow{u}}(D)$. De même r_α est égal à la composée $s_D \circ s_{D'}$ pourvu que D passe par le centre de r_α et que $D' = r_{-\frac{1}{2}\alpha}(D)$.

b. Montrer qu'on peut choisir trois droites D, D', D'' telles que $t_{\overrightarrow{u}} = s_D \circ s_{D'}$ et $r_\alpha = s_{D'} \circ s_{D''}$.

c. Comment s'exprime le centre la rotation $t_{\overrightarrow{u}} \circ r_\alpha$ en fonction de D, D' et D''.