CAPES externe de Mathématiques
session 1994
deuxième composition

Enoncé

http://perso.wanadoo.fr/megamaths

[0] [ag27e]

Notations et objectifs du problème

Dans tout le problème, P désigne un plan affine euclidien orienté, $\mathscr{R} = (O ; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct de P. Les coordonnées et les affixes des points de P (resp. des vecteurs du plan vectoriel associé) sont définies par rapport au repère $\mathscr{R}$ (resp. à la base $(\vec{i}, \vec{j})$).

Soit D_1 et D_2 deux droites de P de vecteurs directeurs respectifs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$, et θ un nombre réel. On rappelle que θ est une mesure de l'angle orienté du couple de droites (D_1, D_2) si, et seulement si, θ ou $\theta + \pi$ est une mesure de l'angle orienté du couple de vecteurs $(\vec{v_1}, \vec{v_2})$.

Étant donné trois droites D, D_1, D_2 du plan P, on dit que D_1 et D_2 sont symétriquement inclinées sur D si, et seulement si, les angles orientés des couples de droites (D, D_1) et (D, D_2) ont des mesures opposées modulo π.

Le problème est consacré à quelques questions relatives à la notion de points cocycliques. La partie I la relie à la notion de deux droites symétriquement inclinées sur une même troisième. Les parties IV et V étudient plusieurs configurations associées à des points cocycliques d'une conique. Cette étude s'appuie sur la généralisation à une conique quelconque de la notion de puissance d'un point par rapport à un cercle (parties II et III).

Préliminaires

1. Soit $Q(X) = a_0 X^4 + a_1 X^3 + a_2 X^2 + a_3 X + a_4$ un polynôme de degré 4 à coefficients complexes a_j, $0 \leqslant j \leqslant 4$. On note x_1, x_2, x_3, x_4 ses quatre racines complexes, distinctes ou non, et on pose :

$$\sigma_1 = \sum_{1 \leqslant j \leqslant 4} x_j, \qquad \sigma_2 = \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant 4} x_j x_k, \qquad \sigma_3 = \sum_{1 \leqslant j < k < l \leqslant 4} x_j x_k x_l, \qquad \sigma_4 = x_1 x_2 x_3 x_4.$$

Exprimer, sans démonstration, les nombres complexes σ_1, σ_2, σ_3 et σ_4 en fonction des coefficients a_0, a_1, a_2, a_3 et a_4.

2. Soit D_1 et D_2 deux droites de P de vecteurs directeurs respectifs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$. On note z_1, z_2, les affixes de $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$. Soit θ un nombre réel.

2.1. Donner, sans démonstration, une propriété du nombre complexe $\dfrac{z_2}{z_1} e^{-i\theta}$ qui soit équivalente à l'égalité $(\vec{v_1}, \vec{v_2}) = \theta \ (2\pi)$.

2.2. En déduire une propriété du nombre complexe $\dfrac{z_2}{z_1} e^{-i\theta}$ qui soit équivalente à l'égalité :

$$(D_1, D_2) = \theta \ (\pi).$$

3. Soit $(\alpha, \beta, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

3.1. Préciser, sans démonstration, la nature et les éléments de la transformation ϕ du plan P définie analytiquement dans le repère $\mathscr{R}$ par la représentation : $x' = \lambda x + \alpha$, $y' = \lambda y + \beta$.

3.2. Soit Γ une courbe d'équation, dans le repère $\mathscr{R}$, $f(x, y) = 0$, où f désigne une application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble Γ' défini par l'équation $f(\lambda x + \alpha, \lambda y + \beta) = 0$ se déduit de Γ par une transformation qu'on exprimera au moyen de ϕ.

I. Droites symétriquement inclinées et points cocycliques.

I.1. Soit trois droites D, D_1, D_2 du plan P, $\vec{v}$ un vecteur directeur de D d'affixe z, $\vec{v_j}$ un vecteur directeur de D_j, d'affixe z_j, $1 \leqslant j \leqslant 2$.

Montrer, au moyen des préliminaires que D_1 et D_2 sont symétriquement inclinées sur D si, et seulement si, $\frac{z_1 z_2}{z^2}$ est réel.

En déduire que, lorsque D_1 et D_2 sont parallèles, elles sont symétriquement inclinées sur D si, et seulement si, elles sont soit parallèles à D, soit perpendiculaires à D.

I.2. Soit A_1, A_2, A_3, A_4, quatre points distincts d'un cercle C du plan P. Pour $1 \leqslant j \leqslant 4$, on note z_j l'affixe de A_j. On suppose que les droites $(A_1 A_2)$ et $(A_3 A_4)$ sont symétriquement inclinées sur une droite D de P.

I.2.1. Montrer que $\dfrac{(z_3 - z_4)(z_2 - z_1)}{(z_3 - z_1)(z_2 - z_4)}$ est un nombre réel.

I.2.2. Montrer que les droites $(A_1 A_3)$ et $(A_2 A_4)$ sont symétriquement inclinées sur D. En est-il de même pour les droites $(A_1 A_4)$ et $(A_2 A_3)$?

I.3. Soit A_1, A_2, A_3, trois points distincts d'un cercle C du plan P et T la tangente en A_1 à C. Pour $1 \leqslant j \leqslant 3$, on note z_j l'affixe de A_j. On note t l'affixe d'un vecteur directeur de T, et on suppose que les droites $(A_1 A_2)$ et $(A_1 A_3)$ sont symétriquement inclinées sur une droite D de P.

I.3.1. Montrer que $\dfrac{(z_1 - z_2)\, t}{(z_3 - z_1)(z_1 - z_2)}$ est un nombre réel.

I.3.2. Montrer que les droites T et $(A_2 A_3)$ sont symétriquement inclinées sur D.

II. Puissance d'un point par rapport à une conique.

Soit Γ une conique et S un point du plan P. On se propose de définir la notion de puissance du point S par rapport à la conique Γ en commençant par le cas où Γ est un cercle. Pour cela on considère une droite quelconque Δ passant par S, munie d'un vecteur directeur unitaire $\vec{u}$ par rapport auquel sont définies les mesures algébriques.

II.1. On suppose, dans cette question II.1. seulement, que Γ est un cercle de centre I et de rayon R, $R > 0$.

II.1.1. On suppose que Δ coupe Γ en deux points distincts A et B et on pose $p = \overline{SA} \cdot \overline{SB}$. Soit A' le point de Γ diamétralement opposé à A. Montrer que $p = \overline{SA} \cdot \overline{SA'}$. Exprimer p en fonction de SI et de R.

Le nombre p, qui ne dépend que de S et de Γ, s'appelle la puissance du point S par rapport au cercle Γ et sera noté $\Gamma(S)$.

II.1.2. On suppose que Δ est tangente à Γ en un point M_0. Montrer que $\Gamma(S) = SM_0^2$.

II.2. On suppose maintenant que Γ n'est pas un cercle. Soit e son excentricité, D son axe focal, c'est-à-dire l'axe de symétrie qui contient son (ou ses) foyer(s). On note θ une mesure de l'angle orienté du couple de droites (D, Δ).

On se propose de montrer que, lorsque Δ coupe Γ en deux points A et B, le produit $(1 - e^2 \cos^2 \theta)\, \overline{SA} \cdot \overline{SB}$ ne dépend que de S et de Γ. Pour cela on suppose, dans cette question II.2., le repère $\mathscr{R}$ choisi de façon que $D = (O, \vec{i})$.

II.2.1. Montrer que Γ peut être définie, dans le repère $\mathscr{R}$, par l'équation $f(x, y) = 0$, avec $f(x,y) = (1 - e^2)x^2 + y^2 + u_1 x + u_2$, u_1 et u_2 désignant deux constantes réelles.

Tournez la page S.V.P.

II.2.2. On note (x_0, y_0) les coordonnées de S. Soit M un point de Δ. On pose $\lambda = \overline{SM}$.
Exprimer les coordonnées x et y de M au moyen de x_0, y_0, θ et λ. En déduire que M appartient à Γ si, et seulement si, λ est racine d'une équation de la forme $(1 - e^2 \cos^2 \theta) X^2 + \beta X + \gamma = 0$ où β et γ sont deux réels qu'on exprimera au moyen de θ, x_0, y_0, e, u_1 et u_2.

II.2.3. On suppose que Δ coupe Γ en deux points distincts A et B. Montrer que le réel p défini par $p = (1 - e^2 \cos^2 \theta)\, \overline{SA} \cdot \overline{SB}$ ne dépend que de S et de Γ et en donner une expression en fonction de x_0, y_0, e, u_1 et u_2.
p s'appelle la puissance du point S par rapport à la conique Γ et sera noté $\Gamma(S)$.

II.2.4. On suppose que Δ est tangente à Γ en un point M_0. Montrer qu'on a alors $1 - e^2 \cos^2 \theta \neq 0$, puis que $\Gamma(S) = (1 - e^2 \cos^2 \theta)\, SM_0^2$.

III. Lignes de niveau de l'application $S \longmapsto \Gamma(S)$.

Soit Γ une conique du plan P.
A tout réel r on associe l'ensemble $\Gamma_r = \{S \in P \mid \Gamma(S) = r\}$.
On pose $U = \{r \in \mathbb{R} \mid \Gamma_r = \emptyset\}$, $V = \{r \in \mathbb{R} \mid \Gamma_r$ est réduit à un point$\}$, $W = \mathbb{R} \setminus (U \cup V)$.

III.1. On suppose que Γ est un cercle de centre I et de rayon R. Préciser, au moyen du réel R, les trois ensembles U, V et W et décrire Γ_r pour $r \in W$.

III.2. On suppose que Γ n'est pas un cercle.

III.2.1. Montrer que $\Gamma = \Gamma_0$ et en déduire que $0 \in W$.

III.2.2. On suppose que Γ est une ellipse, d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ dans le repère $\mathscr{R}$, avec $0 < b < a$.
Déterminer les trois ensembles U, V et W, puis montrer que, pour tout réel r appartenant à W, Γ_r est l'image de Γ par une transformation géométrique dont on précisera la nature et les éléments.

III.2.3. Répondre aux questions III.2.2. dans le cas où Γ est la parabole d'équation $y^2 = 2ax$ dans le repère $\mathscr{R}$, avec $a > 0$.

III.2.4. On suppose que Γ est une hyperbole, d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ dans le repère $\mathscr{R}$, avec $a > 0$ et $b > 0$.

a. Décrire l'ensemble Γ_{b^2}.

b. Déterminer et construire l'ensemble $\Gamma' = \Gamma_{2b^2}$.

c. On suppose $r \neq b^2$. Montrer que, selon la valeur du réel r, Γ_r est l'image de Γ ou de Γ' par une transformation géométrique dont on précisera la nature et les éléments.

IV. Points cocycliques sur une conique.

Dans toute cette partie, Γ désigne une conique du plan P qui n'est pas un cercle. On note D son axe focal et on considère des points distincts A_1, A_2, A_3, A_4 sur Γ.

IV.1. On suppose que les droites $(A_1 A_2)$ et $(A_3 A_4)$ sont sécantes en un point S.

IV.1.1. Montrer que S est différent de A_1, A_2, A_3 et A_4.

IV.1.2. Les mesures algébriques sur les droites $(A_1 A_2)$ et $(A_3 A_4)$ étant définies par rapport à des vecteurs unitaires, montrer que A_1, A_2, A_3, A_4 sont cocycliques si, et seulement si, $\overline{SA_1} \cdot \overline{SA_2} = \overline{SA_3} \cdot \overline{SA_4}$ (on pourra utiliser II.1.1.).

IV.1.3. Montrer que les points A_1, A_2, A_3, A_4 sont cocycliques si, et seulement si, les droites $(A_1 A_2)$ et $(A_3 A_4)$ sont symétriquement inclinées sur la droite D.

IV.2. On suppose les droites $(A_1 A_2)$ et $(A_3 A_4)$ parallèles.

IV.2.1. L'équivalence montrée en IV.1.3. est-elle encore vraie (on pourra utiliser I.2.2.) ?

IV.2.2. Montrer que les points A_1, A_2, A_3, A_4 sont cocycliques si, et seulement si, les droites $(A_1 A_2)$ et $(A_3 A_4)$ sont perpendiculaires à un même axe de symétrie de Γ.

IV.3. On suppose que la tangente T_1 à Γ en A_1 et la droite $(A_2 A_3)$ sont sécantes en un point S. On appelle C le cercle circonscrit au triangle $A_1 A_2 A_3$.

IV.3.1. Montrer que S est différent de A_1, A_2 et A_3.

IV.3.2. Les mesures algébriques sur la droite $(A_2 A_3)$ étant définies par rapport à un vecteur unitaire, montrer que T_1 est la tangente à C en A_1 si, et seulement si, $SA_1^2 = \overline{SA_2} \cdot \overline{SA_3}$ (on pourra utiliser II.1.2.).

IV.3.3. Montrer que T_1 est la tangente à C en A_1 si, et seulement si, les droites $(A_1 A_2)$ et $(A_1 A_3)$ sont symétriquement inclinées sur la droite D.

IV.4. On suppose que la tangente T_1 à Γ en A_1 et la tangente T_2 à Γ en A_2 sont sécantes en un point S.

IV.4.1. Montrer que S est différent de A_1 et A_2.

IV.4.2. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) il existe un cercle C tangent à T_1 en A_1 et à T_2 en A_2 ;

(ii) $SA_1 = SA_2$;

(iii) T_1 et T_2 sont symétriquement inclinées sur la droite D.

IV.4.3. On suppose que les propriétés (i), (ii) et (iii) ci-dessus sont satisfaites. On note D_1 la parallèle à D passant par S, ϕ_1 la réflexion d'axe D_1, D'_1 la perpendiculaire à D passant par S, ϕ'_1 la réflexion d'axe D'_1. On pose $\phi = \phi_1 \circ \phi'_1$.

a. Reconnaître la transformation ϕ.

b. Quelle est l'image de T_1 par ϕ_1 ? En déduire que $\phi_1(A_1)$ appartient à l'ensemble $\{A_2, \phi(A_2)\}$.

c. Montrer que A_2 appartient à l'ensemble $\{\phi_1(A_1), \phi'_1(A_1)\}$.

IV.4.4. Montrer que les propriétés (i), (ii) et (iii) de la question IV.4.2. sont encore équivalentes à : la droite $(A_1 A_2)$ est perpendiculaire à un axe de symétrie de Γ.

V. Cas de l'ellipse.

Dans cette partie, Γ désigne une ellipse, d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ dans le repère $\mathscr{R}$, avec $0 < b < a$. On pose $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

On note ici U l'ensemble des nombres complexes de module 1 et, à tout élément u de U, on associe le point $M(u)$ du plan P de coordonnées $x = a\dfrac{u + \overline{u}}{2}$, $y = b\dfrac{u - \overline{u}}{2i}$.

V.1. Montrer que l'application $u \longmapsto M(u)$ est une bijection de U sur Γ.

V.2. C désigne un cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0$ dans le repère $\mathscr{R}$.

V.2.1. Déterminer un polynôme $Q_C(X)$ de degré 4, à coefficients complexes, de coefficient dominant c^2, dont les autres coefficients sont des polynômes en $a, b, \alpha, \beta, \gamma$ qu'on précisera, et qui vérifie la propriété suivante : $(\forall u, u \in U)\,[(M(u) \in C \cap \Gamma) \Longleftrightarrow Q_C(u) = 0]$.

Le polynôme $Q_C(X)$ ainsi construit est appelé polynôme associé au cercle C.

V.2.2. On suppose que $C \cap \Gamma$ est un ensemble de quatre points (distincts) M_1, M_2, M_3 et M_4. Pour $1 \leqslant j \leqslant 4$, on pose $M_j = M(u_j)$, $u_j \in U$.

Montrer que $u_1 u_2 u_3 u_4 = 1$.

Tournez la page S.V.P.

V.3. Soit $M_1 = M(u_1)$, $M_2 = M(u_2)$, $M_3 = M(u_3)$ et $M_4 = M(u_4)$, $u_j \in U$ pour $1 \leqslant j \leqslant 4$, quatre points distincts de Γ. Montrer que ces points sont cocycliques si, et seulement si, $u_1 u_2 u_3 u_4 = 1$.

V.4. Soit $M_0 = M(u_0)$ un point de Γ, $u_0 \in U$.

V.4.1. Montrer qu'il existe un unique cercle C_0 tel que u_0 soit racine d'ordre de multiplicité au moins égal à 3 du polynôme $Q_{C_0}(X)$ associé à C_0.
C_0 s'appelle le cercle osculateur à l'ellipse Γ au point M_0.

V.4.2. Exprimer, en fonction de a, b et u_0, les coordonnées du centre Ω_0 de C_0.

V.4.3. Montrer que C_0 et Γ ont la même tangente T_0 au point M_0.

V.4.4. Comment doit-on choisir M_0 sur Γ pour avoir $C_0 \cap \Gamma = \{M_0\}$?

V.4.5. On suppose que M_0 n'est pas choisi de cette manière.
Montrer que C_0 recoupe Γ en un unique point M_1 (différent de M_0), et que les droites T_0 et $(M_0 M_1)$ sont symétriquement inclinées sur l'axe focal D de Γ.

V.4.6. On note E l'ensemble de tous les points M de $\Gamma \setminus \{M_0\}$ qui sont tels que le cercle osculateur en M à Γ passe par M_0. Quel est le cardinal de E ? Montrer que l'ensemble $E \cup \{M_0\}$ est contenu dans un cercle (on distinguera les cas où M_0 est choisi comme en V.4.4. et ceux où il est choisi comme en V.4.5.).