CAPES externe de Mathématiques
session 1998
deuxième composition

Enoncé

http://perso.wanadoo.fr/megamaths

[0] [ag44e]

NOTATIONS DU PROBLÈME

$\mathcal{A}$ désigne un plan euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé direct et $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel associé à $\mathcal{A}$. On note $\vec{x} \cdot \vec{y}$ le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ de $\mathcal{E}$.

Si ψ est un endomorphisme linéaire de $\mathcal{E}$, on note ψ^* l'endomorphisme adjoint de ψ, c'est-à-dire l'unique endomorphisme tel qu'on ait $\vec{x} \cdot \psi(\vec{y}) = \psi^*(\vec{x}) \cdot \vec{y}$ quels que soient $\vec{x}$ et $\vec{y}$ dans $\mathcal{E}$. Un endomorphisme ψ est dit symétrique si et seulement si $\psi^* = \psi$.

On réservera le nom de triangle aux triangles non dégénérés, c'est-à-dire dont les trois sommets sont distincts et non alignés.

On appelle coordonnées barycentriques d'un point M relativement à un triangle ABC, les trois nombres réels λ, μ et ν tels que $\lambda + \mu + \nu = 1$ et que M soit le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients λ, μ et ν. On rappelle qu'un point M est intérieur au triangle ABC si et seulement si ses coordonnées barycentriques relativement au triangle sont strictement positives.

Les parties I et II sont indépendantes.

0. PRÉLIMINAIRES

0.1. Montrer qu'un endomorphisme linéaire ψ de $\mathcal{E}$ est symétrique s'il existe une base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ de $\mathcal{E}$ telle que $\vec{u} \cdot \psi(\vec{v}) = \psi(\vec{u}) \cdot \vec{v}$.

0.2. Montrer que l'inverse d'un automorphisme linéaire symétrique de $\mathcal{E}$ est symétrique.

0.3. Soit ABC un triangle et M un point du plan. Montrer que si λ, μ et ν ne sont pas tous nuls et vérifient $\lambda \overrightarrow{MA} + \mu \overrightarrow{MB} + \nu \overrightarrow{MC} = \vec{0}$, alors on a $\lambda + \mu + \nu \neq 0$.

I. POINTS ISOGONAUX RELATIVEMENT À UN TRIANGLE

Soit ABC un triangle du plan $\mathcal{A}$. On note a, b et c les affixes des points A, B et C, et P le polynôme unitaire ayant a, b et c pour racines. Deux points M et N, distincts ou confondus, sont dits isogonaux (resp. strictement isogonaux) relativement à ce triangle s'ils sont distincts de A, B et C et si on a :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AC}) \ [\text{mod } \pi] \ (\text{resp. } [\text{mod } 2\pi]);$$
$$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BM}) = (\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{BA}) \ [\text{mod } \pi] \ (\text{resp. } [\text{mod } 2\pi]);$$
$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CM}) = (\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{CB}) \ [\text{mod } \pi] \ (\text{resp. } [\text{mod } 2\pi]).$$

I.1. Soit M et N deux points distincts ou confondus, d'affixes respectives m et n, et soit Q le polynôme $Q(z) = (z-m)(z-n)$. Montrer que M et N sont isogonaux relativement au triangle ABC si et seulement si il existe des nombres réels non nuls α, β et γ tels que $Q(a) = \alpha P'(a)$, $Q(b) = \beta P'(b)$ et $Q(c) = \gamma P'(c)$ et que ces points sont strictement isogonaux si et seulement si α, β et γ sont strictement positifs.

I.2. On suppose que les points M et N, d'affixes m et n, sont isogonaux relativement au triangle ABC.

I.2.1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{Q(z)}{P(z)}$.

En déduire que les nombres α, β et γ de la question précédente vérifient $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

I.2.2. Établir que $\dfrac{\alpha}{m-a} + \dfrac{\beta}{m-b} + \dfrac{\gamma}{m-c} = 0$ et $\dfrac{\alpha}{n-a} + \dfrac{\beta}{n-b} + \dfrac{\gamma}{n-c} = 0$.

I.2.3. Exprimer les coordonnées barycentriques des points M et N relativement au triangle ABC. En déduire que ces points appartiennent au complémentaire dans $\mathcal{A}$ de la réunion des droites (AB), (BC) et (CA) et qu'ils sont strictement isogonaux si et seulement si ils appartiennent à l'intérieur du triangle ABC.

I.3. Soit α, β et γ trois réels non nuls, de somme égale à 1. On pose :

$$Q(z) = \alpha(z-b)(z-c) + \beta(z-a)(z-c) + \gamma(z-a)(z-b).$$

Soit m et n les racines de ce polynôme, avec éventuellement $m = n$. Montrer que les points M et N d'affixes respectives m et n sont isogonaux relativement au triangle ABC.

I.4. Soit M un point du plan $\mathcal{A}$. On note m son affixe et (λ, μ, ν) ses coordonnées barycentriques relativement au triangle ABC.

I.4.1. Montrer qu'une condition nécessaire pour qu'il existe un point N tel que M et N soient isogonaux relativement au triangle ABC est que l'on ait :

$$\lambda \neq 0, \quad \mu \neq 0, \quad \nu \neq 0 \qquad \textbf{(C1)}$$

$$\lambda |m-a|^2 + \mu |m-b|^2 + \nu |m-c|^2 \neq 0. \qquad \textbf{(C2)}$$

I.4.2. Montrer que si M vérifie ces conditions, il existe un point N et un seul tel que M et N soient isogonaux relativement au triangle ABC.

I.4.3. Justifier que tout point M de l'intérieur Δ du triangle ABC vérifie les conditions du I.4.1. et que le point N associé à M appartient à Δ. Montrer que l'application g qui associe N à M est un difféomorphisme involutif de Δ sur lui-même.

I.4.4. Montrer que la condition **(C2)** est équivalente à :

$$\det \begin{vmatrix} m-a & m-b & m-c \\ \overline{m}-\overline{a} & \overline{m}-\overline{b} & \overline{m}-\overline{c} \\ |m-a|^2 & |m-b|^2 & |m-c|^2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Développer ce déterminant [on pourra, pour alléger les calculs, supposer que l'origine est en A, c'est-à-dire faire $a = 0$].

I.4.5. Décrire l'ensemble des points $\mathcal{A}$ vérifiant les conditions du I.4.1.

II. TRIANGLES ORTHOLOGIQUES

Étant donné deux triangles ABC et A′B′C′ du plan $\mathcal{A}$, on note :

– δ_A, δ_B et δ_C les droites passant respectivement par A, B et C et perpendiculaires respectivement aux droites (B′C′), (C′A′) et (A′B′) ;

– $\delta_{A'}$, $\delta_{B'}$ et $\delta_{C'}$ les droites passant respectivement par A′, B′ et C′ et perpendiculaires respectivement aux droites (BC), (CA) et (AB) ;

– f l'application affine de $\mathcal{A}$ dans lui-même transformant A en A′, B en B′ et C en C′ et φ l'application linéaire associée à f.

On dit que le triangle A′B′C′ est <u>orthologique</u> au triangle ABC si les droites δ_A, δ_B et δ_C sont concourantes.

II.1. Soit ABC et A′B′C′ deux triangles du plan $\mathcal{A}$.

II.1.1. Montrer que l'application Φ de $\mathcal{A}$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$\Phi(M) = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{C'A'} + \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{A'B'}$$

est constante sur $\mathcal{A}$.

II.1.2. Montrer que cette constante est égale à $\overrightarrow{CA} \cdot \left([\varphi - \varphi^*] (\overrightarrow{AB}) \right)$.

II.1.3. On suppose que le triangle $A'B'C'$ est orthologique au triangle ABC et on note O le point de concours des droites δ_A, δ_B et δ_C. Montrer que $\Phi(O) = 0$. En déduire que φ est symétrique.

II.1.4. Réciproquement, montrer que si φ est symétrique, alors le triangle $A'B'C'$ est orthologique au triangle ABC.

II.2. Montrer que si $A'B'C'$ est orthologique au triangle ABC, alors ABC est orthologique au triangle $A'B'C'$. Quelle relation y a-t-il entre le point de concours O des droites δ_A, δ_B et δ_C et le point de concours O' des droites $\delta_{A'}$, $\delta_{B'}$ et $\delta_{C'}$?

La relation « $A'B'C'$ est orthologique au triangle ABC » est donc symétrique. On dira désormais : « Les triangles ABC et $A'B'C'$ sont orthologiques ».

II.3. Soit ABC un triangle et soit A', B' et C' les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB]. Montrer que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont orthologiques. Préciser les points de concours des droites δ_A, δ_B et δ_C et des droites $\delta_{A'}$, $\delta_{B'}$ et $\delta_{C'}$. Identifier l'application affine f transformant les points A, B et C en les points A', B' et C'.

III. ISOGONIE ET ORTHOLOGIE

Étant donné deux points distincts X et Y du plan, on note σ_{XY} la symétrie orthogonale par rapport à la droite (XY). Soit ABC un triangle et M un point n'appartenant pas aux droites (AB), (BC) et (CA). On pose $A' = \sigma_{BC}(M)$, $B' = \sigma_{CA}(M)$ et $C' = \sigma_{AB}(M)$.

III.1. À quelle condition les points A', B' et C' forment-ils un triangle ? Cette condition étant remplie, montrer que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont orthologiques.

On suppose dans ce qui suit que $A'B'C'$ est un triangle. On note N le point de concours des droites δ_A, δ_B et δ_C.

III.2. Quelle est la nature de l'application affine $\sigma_{CA} \circ \sigma_{AB}$? En déduire que le point N est le centre du cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$.

III.3. Montrer que $\sigma_{AB} \circ \sigma_{AN} \circ \sigma_{AC} = \sigma_{AM}$. En déduire que M et N sont isogonaux relativement au triangle ABC. Que peut-on dire du centre du cercle circonscrit et de l'orthocentre d'un triangle ?

III.4. On suppose que M est intérieur au triangle ABC et on note I, J et K les points d'intersections respectivement des droites (NA') et (BC), des droites (NB') et (CA) et des droites (NC') et (AB). Soit r le rayon du cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$.

III.4.1. Montrer que $MI + IN = r$. En déduire qu'il existe une ellipse Γ de foyers M et N qui passe par les points I, J et K.

III.4.2. Montrer que Γ est tangente aux trois côtés du triangle ABC.

III.5. Réciproquement, montrer que les foyers d'une ellipse tangente aux côtés d'un triangle ABC sont strictement isogonaux relativement à ce triangle.