Licence L3 - option géométrie.

Correction du partiel du 16 novembre 2006

Questions

1. d
2. c
3. b, e

Exercices

4. Soit G le barycentre du système (A,α), (B,β), (C,γ). On a $\alpha\vec{GA}+\beta\vec{GB}+\gamma\vec{GC}=0$ d'où $(\alpha+\beta+\gamma)\vec{AG}=\beta\vec{AB}+\gamma\vec{AC}$ (on a introduit le point A ds $\vec{GB}$ et $\vec{GC}$: $\vec{GB}=\vec{GA}+\vec{AB}, \dots$). Or $\alpha+\beta+\gamma=1$ donc $\vec{AG}=\beta\vec{AB}+\gamma\vec{AC}$

   Supposons $\beta=0$ alors $\vec{AG}=\gamma\vec{AC}$. Or $\vec{AC}\neq 0$ donc G appartient à la droite passant par A de vecteur directeur $\vec{AC}$, c'est à dire la droite (AC)

   Réciproquement supposons $G\in(AC)$ alors $\exists\lambda\in\mathbb{R}$, $\vec{AG}=\lambda\vec{AC}$. On sait d'autre part $\vec{AG}=\beta\vec{AB}+\gamma\vec{AC}$. Comme la famille $(\vec{AB},\vec{AC})$ est libre (A, B, C sont non alignés) on a $\beta=0$ et $\gamma=\lambda$

5. a. L'application $f:(x,y,z)\mapsto x+y+z$, $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ est linéaire et non nulle donc surjective donc $f^{-1}(-1)\neq\emptyset$ (on peut aussi observer $(-1,0,0)\in f^{-1}(-1)$!). Par le théorème du rang le noyau de f est de dimension 2. $\mathcal{P}=f^{-1}(-1)$ est le sous espace affine passant par un point de $f^{-1}(-1)$ (par ex $(-1,0,0)$) et de direction $\operatorname{Ker} f$ (cf cours) donc est de dimension 2.

   On vérifie $A\notin\mathcal{P}$ en calculant $f(A)=1+2+3=6\neq -1$

   b. $\mathcal{P}'$ a pour direction $\operatorname{Ker} f$. On cherche donc l'équation de $\mathcal{P}'$ sous la forme $f(x,y,z)=c$ pour un $c\in\mathbb{R}$, où f est donnée en a.

   A vérifie l'équation $f(x,y,z)=c$ ssi $f(A)=c$ donc si $c=6$

   Comme en a), l'ensemble d'équation $f(x,y,z)=6$ est un sous-espace affine contenant A et de direction $\operatorname{Ker} f$ donc c'est $\mathcal{P}'$

   donc $x+y+z=6$ est une equation de $\mathcal{P}'$

   c. $(-1,0,0)$ vérifie l'équation de $\mathcal{P}$

   La direction de $\mathcal{P}$ est $\operatorname{Ker} f$ qui est de dim 2 (question a). On en cherche deux vecteurs linéairement indépendants.

   On peut paramétrer $\operatorname{Ker} f$ par y et z : $\operatorname{Ker} f=\{(-y-z,y,z),\ (y,z)\in\mathbb{R}^2\}$ d'où deux vecteurs de $\operatorname{Ker} f$ $(-1,1,0)$ et $(-1,0,1)$ manifestement indépendants.

   $((-1,0,0),(-1,1,0),(-1,0,1))$ est un repère cartésien de $\mathcal{P}$

   Tout point de $\mathcal{P}$ s'écrit de façon unique $(-1,0,0)+\alpha(-1,1,0)+\beta(-1,0,1)=(-1-\alpha-\beta,\alpha,\beta)$. L'application $\mathbb{R}^2\to\mathcal{P}$, $(\alpha,\beta)\mapsto(-1-\alpha-\beta,\alpha,\beta)$ est un paramétrage de $\mathcal{P}$.

5 d. On sait que pour tout $u \in \mathbb{R}^3$ $t_u(\mathcal{P})$ est un plan parallèle à $\mathcal{P}$ passant par $t_u((-1,0,0))$ puisque $(-1,0,0) \in \mathcal{P}$

Prenons $u_0 = \overrightarrow{(-1,0,0)A} = (1,2,3) - (-1,0,0) = (2,2,3)$. alors $t_{u_0}((-1,0,0)) = (-1,0,0) + u_0 = A$ donc $t_{u_0}(\mathcal{P})$ est le plan passant par A parallèle à $\mathcal{P}$, c'est à dire $\mathcal{P}'$

On a pour tout $v \in \mathbb{R}^3$ $t_{u_0+v}(\mathcal{P}) = t_v \circ t_{u_0}(\mathcal{P}) = t_v(\mathcal{P}')$ donc $t_{u_0+v}(\mathcal{P}) = \mathcal{P}' \Leftrightarrow t_v(\mathcal{P}') = \mathcal{P}'$

Pour $v \in \mathbb{R}^3$ $t_v(\mathcal{P}')$ est le plan parallèle à $\mathcal{P}'$ passant par $t_v(A)$ donc $t_v(\mathcal{P}') = \mathcal{P}' \Leftrightarrow t_v(A) \in \mathcal{P}' \Leftrightarrow v \in \vec{\mathcal{P}'} = \ker f$

On en déduit $t_u(\mathcal{P}) = \mathcal{P}' \Leftrightarrow \exists v \in \ker f,\ u = u_0 + v \Leftrightarrow u \in u_0 + \ker f$

$u_0 + \ker f$ est le plan parallèle à $\mathcal{P}$ passant par $u_0 = (2,2,3)$

e. h homothétie de centre B de rapport $\frac{1}{2}$ est l'application $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $M \mapsto B + \frac{1}{2}\overrightarrow{BM}$

On sait que $h(\mathcal{P})$ est un plan parallèle à $\mathcal{P}$ donc $h(\mathcal{P}) = \mathcal{P}' \Leftrightarrow A \in h(\mathcal{P}) \Leftrightarrow \exists M \in \mathcal{P},\ h(M) = A$

On introduit le point $C = (-1,0,0) \in \mathcal{P}$. On a $M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \in \vec{\mathcal{P}} = \ker f$. D'autre part $h(M) = h(C) + \frac{1}{2}\overrightarrow{CM} = B + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CM}$

Maintenant $\exists M \in \mathcal{P},\ h(M) = A \Leftrightarrow \exists M \in \mathcal{P},\ B + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CM} = A \Leftrightarrow \exists u \in \vec{\mathcal{P}},\ B + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + u = A$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \in \vec{\mathcal{P}}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \in \vec{\mathcal{P}}$ (on écrit $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \in \vec{\mathcal{P}}$

$\Leftrightarrow B \in A - \overrightarrow{AC} + \vec{\mathcal{P}}$

$A - \overrightarrow{AC} + \vec{\mathcal{P}}$ est le plan parallèle à $\vec{\mathcal{P}}$ passant par $A - \overrightarrow{AC}$.

6a. $\mathcal{P}$ est le sous-espace affine passant par A de direction le sev de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$A \in \mathcal{P}$ donc $\mathcal{P}$ est non vide.

On a $\overrightarrow{AB} = (-1,-1,-3)$ et $\overrightarrow{AC} = (0,-4,-4)$. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont linéairement indépendants ($\alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow -\alpha = 0$ et $-\alpha - 4\beta = 0$
$\Rightarrow \alpha = 0$ et $\beta = 0$)

donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une base de $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ donc $\mathcal{P}$ est de dimension 2 et $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ en est un repère cartésien.

6b. La droite passant par M de vecteur directeur u est l'ensemble des points $M + \lambda u$, λ décrivant $\mathbb{R}$

On cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ tq $M + \lambda u$ soit dans $\mathcal{P}$ ce qui équivaut à $\overrightarrow{A(M+\lambda u)} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ ce qui équivaut à $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A(M+\lambda u)})$ est une famille liée.

On a $\overrightarrow{A(M+\lambda u)} = (x+y+z) + \lambda(1,1,1) - (1,2,3) = (\lambda+x-1, \lambda+y-2, \lambda+z-3)$

On calcule le déterminant de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A(M+\lambda u)})$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & \lambda+x-1 \\ -1 & -4 & \lambda+y-2 \\ -3 & -4 & \lambda+z-3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -4 & \lambda+y-2 \\ -4 & \lambda+z-3 \end{vmatrix} + (\lambda+x-1)\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = 4(\lambda+z-3) - 4(\lambda+y-2) - 8(\lambda+x-1)$$

$$= -8\lambda - 8x - 4y + 4z + 4$$

Donc $M + \lambda u \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{-2x-y+z+1}{2}$ et alors $\overrightarrow{A(M+\lambda u)} = \frac{1}{2}(-y+z-1, -2x+y+z-3, -2x-y+3z-5)$ dont on veut les coordonnées dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ de $\vec{\mathcal{P}}$: $\overrightarrow{A(M+\lambda u)} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} -y+z-1 = -2\alpha \\ -2x+y+z-3 = (-\alpha-4\beta)2 \\ -2x-y+3z-5 = 2(-3\alpha-4\beta) \end{cases}$ $\Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}(y-z+1)$ et $\beta = \frac{1}{8}(2x-2y+2)$

(6b.) $\Pi + \lambda u = A + \frac{1}{2}(y-z+1)\vec{AB} + \frac{1}{4}(x-y+1)\vec{AC}$

$\left(\frac{1}{2}(y-z+1), \frac{1}{4}(x-y+1)\right)$ sont les coordonnées du point d'intersection dans le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$

6c. D'après 6b le point d'intersection est $\Pi + \lambda u = (x,y,z) + \frac{-2x-y+z+1}{2}(1,1,1)$

Les coordonnées de $\Pi + \lambda u$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ s'écrivent donc

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$