1. $A \neq B$ points de $\mathbb{R}^3$. La droite passant par A et B est l'ensemble $\{M \in \mathbb{R}^3, \vec{AM}$ est colinéaire à $\vec{AB}\} = \{M \in \mathbb{R}^3, \exists \lambda \in \mathbb{R}, \vec{AM} = \lambda \vec{AB}\}$

C'est le sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ engendré par A et B et ce sous-espace affine est de dimension 1.

Si $A = B$ il existe une infinité de droite passant par A et B. Le sous-espace affine engendré par A et B est de dimension 0.

2. Soient f, g $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ deux applications affines dont on note φ et ψ les parties linéaires. Par définition on a

$\forall M, N \in \mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{f(M)f(N)} = \varphi(\overrightarrow{MN})$ et $\overrightarrow{g(M)g(N)} = \psi(\overrightarrow{MN})$

Alors pour $M, N \in \mathbb{R}^3$ $\overrightarrow{g\circ f(M)\, g\circ f(N)} = \overrightarrow{g(f(M))g(f(N))} = \psi(\overrightarrow{f(M)f(N)}) = \psi(\varphi(\overrightarrow{MN})) = \psi\circ\varphi\,(\overrightarrow{MN})$

Or $\psi\circ\varphi$ est une application linéaire comme composée d'applications linéaires donc $g\circ f$ est affine.

3. Puisque P est de dimension 2 et $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, un sous espace affine ~~E~~ de $\mathbb{R}^3$ contenant P et de dimension ≥ 2 donc c'est P ou $\mathbb{R}^3$ entier.

le point $(0,0,0)$ ne satisfait pas l'équation de P donc n'est pas dans P, donc E n'est pas P c'est $\mathbb{R}^3$ entier

4a. G vérifie $\frac{1}{2}\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = 0$

Supposons $G = A$ alors $\vec{GA} = 0$ donc $\vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = 0$ donc $G = A$ est l'isobarycentre de BCD

Inversement supposons $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = 0$. En introduisant A dans la relation ci-dessus il vient $\frac{1}{2}\vec{GA} + \vec{GA} + \vec{AB} + \vec{GA} + \vec{AC} + \vec{GA} + \vec{AD} = 0$

soit $\frac{7}{2}\vec{GA} = 0$ donc $A = G$

4b. Puisque f est affine, f préserve les barycentres donc $f(G)$ est le barycentre du système $(f(A), \frac{1}{2}), (f(B), 1), (f(C), 1), (f(D), 1)$

Par transitivité du calcul des barycentres le barycentre du système $(A, \frac{1}{2}), (B, 1), \dots, (f(A), \frac{1}{2}), \dots, (f(D), 1)$ coïncide avec le barycentre du système $(G, \frac{1}{2}+1+1+1), (f(G), \frac{1}{2}+1+1+1)$ lequel coïncide avec le barycentre du système $(G, 1), (f(G), 1)$.

On reconnaît l'isobarycentre des points G et $f(G)$, c'est à dire le milieu du segment $[G, f(G)]$

5a. D $\begin{cases} x + y + 2z + 2 = 0 & (1) \\ x - y + 3z + 3 = 0 & (2) \end{cases}$, $A = (1,1,1)$

On choisit un point de D en résolvant le système d'équations. En soustrayant l'équation (1) à l'équation (2) on obtient le système d'équations équivalent : $\begin{cases} x + y + 2z + 2 = 0 \\ -2y + z + 1 = 0 \end{cases}$. On peut alors prendre $y = 0$ on obtient $z = -1$ et en reportant dans (1)

$x = 0$. $B = (0, 0, -1)$ est un point de D.

Pour obtenir un vecteur directeur on choisit un autre point de D en prenant par ex $y = 1$ alors $z = 1$ puis $x = -5$. Notons le C. Comme C est distinct de B, $\vec{BC} = (-5,1,1) - (0,0,-1) = (-5,1,2)$ est un vecteur directeur de D.

5b Avec les choix faits en 5a on a $B_t = B + t\vec{u} = (0,0,-1) + (-5t, t, 2t) = (-5t, t, 2t-1)$

puis $\vec{AB_t} = B_t - A = (-5t - 1, t - 1, 2t - 2)$.

La distance de A à B_t est $\|\vec{AB_t}\| = \sqrt{(-5t-1)^2 + (t-1)^2 + (2t-2)^2} = \sqrt{30t^2 + 6}$

(5b) En fait puisque l'application $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante, rechercher le minimum de l'application $t \mapsto \|\vec{AB_t}\|$ équivaut à rechercher le minimum de $t \mapsto \|\vec{AB_t}\|^2$

On a $30t^2+6 \geq 6$ avec égalité ssi $t=0$. Donc l'application $t \mapsto \|\vec{AB_t}\|^2$ atteint son minimum exactement en $t_0=0$ et vaut alors 6. Donc l'application $t \mapsto \|\vec{AB_t}\|$ atteint son minimum exactement en t_0 et vaut alors $\sqrt{6}$

Par définition $d(A,D) = \inf_{M\in D} \|\vec{AM}\|$. Or lorsque t décrit $\mathbb{R}$ B_t décrit la droite D en entier, donc $\inf_{M\in D} \|\vec{AM}\| = \inf_{t\in\mathbb{R}} \|\vec{AB_t}\| = \sqrt{6}$

5c). $\vec{AB_{t_0}}$ est orthogonal à D. On peut le vérifier en calculant le produit scalaire $\vec{AB_{t_0}} \cdot \vec{u} = \vec{AB}\cdot\vec{u} = (-1,-1,-2)\cdot(-5,1,2)=0$

On peut aussi observer que pour $M\in D$ AM est minimal ssi M est le projeté orthogonal de A sur D. En effet notons A' ce projeté orthogonal. On a par Pythagore $AM^2 = AA'^2 + A'M^2 \geq AA'^2$ avec égalité ssi $M=A'$. Donc nécessairement $B_{t_0}=A'$.

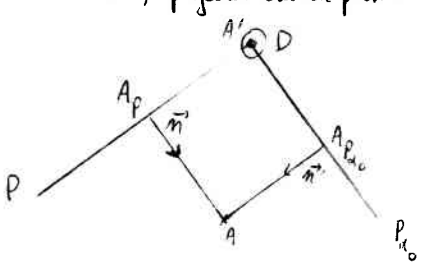
Rq: En choisissant un autre point B de D ou un autre vecteur directeur $\vec{u}$ on change l'application $t\mapsto \|\vec{AB_t}\|$ et la valeur de t_0. Par contre on ne change pas B_{t_0} donc le réel $\inf_{t\in\mathbb{R}} \|\vec{AB_t}\|$ vue l'interprétation donnée en 5b et 5c.

5d. Avec les notations de 5a, l'équation $x+y+2z+2+\alpha(x-y+3z+3)=0$ s'obtient en ajoutant à (1) α fois l'équation (2). Or le système ainsi obtenu $\begin{cases}(1)+\alpha(2)\\(2)\end{cases}$ est équivalent au système $\begin{cases}(1)\\(2)\end{cases}$: il a les mêmes solutions (c'est la méthode du pivot). Comme les équations $(1)+\alpha(2)$ et (2) sont linéaires avec second membre, on obtient bien un système d'équations cartésiennes du même ensemble solution, c'est à dire D.

Rq l'équation $(1)+\alpha(2)$ est bien l'équation d'un plan car le triplet $(1+\alpha, 1-\alpha, 2+3\alpha)$ n'est jamais nul.
Ce plan n'est pas parallèle au plan d'équation (2) car $(1+\alpha, 1-\alpha, 2+3\alpha)$ n'est pas colinéaire à $(1,-1,3)$

5e. Le vecteur $(1+\alpha, 1-\alpha, 2+3\alpha)$ (qui n'est jamais nul) est un vecteur normal de P_α. De même $(1,-1,3)$ est un vecteur normal de P. Par définition P_α est orthogonal à P ssi les vecteurs normaux sont orthogonaux, c'est à dire si le produit scalaire $(1+\alpha,1-\alpha,2+3\alpha)\cdot(1,-1,3) = 11\alpha+6$ est nul. On obtient $\alpha_0 = -\frac{6}{11}$. P_{α_0} est d'équation $\frac{5}{11}x + \frac{17}{11}y + \frac{4}{11}z + \frac{4}{11} = 0$

5f D'abord un dessin, projection sur un plan orthogonal à D de la configuration dans $\mathbb{R}^3$



(5f)
Notons $\vec{n}$ un vecteur normal de P et $\vec{n}'$ un vecteur normal de P_{d_0}. Par construction de d_0 on a $\vec{n}\cdot\vec{n}'=0$ (donc $\vec{n}$ appartient à la direction $\vec{P}_{d_0}$ de P_{d_0})

On veut montrer $A'\in D$. On sait $A'\in P_{d_0}$, il faut donc montrer $A'\in P$

$A_p\in P$ et $\vec{n}$ est un vecteur normal de P donc $P=\{M\in\mathbb{R}^3,\ \overrightarrow{A_pM}\cdot\vec{n}=0\}$. En particulier $A'\in P \iff \overrightarrow{A_pA'}\cdot\vec{n}=0$

Or $\overrightarrow{A_pA'}$ est orthogonal à P_{d_0} par construction de A' donc est colinéaire à $\vec{n}'$. Or $\vec{n}\cdot\vec{n}'=0$ donc on a bien $\overrightarrow{A_pA'}\cdot\vec{n}=0$

Soit maintenant M un point de D alors $M\in P$ et $\overrightarrow{A_pM}\cdot\vec{n}=0$. Comme $\overrightarrow{AA_p}$ est colinéaire à $\vec{n}$ on obtient $\overrightarrow{A_pM}\cdot\overrightarrow{AA_p}=0$

le théorème de Pythagore donne alors la relation $AM^2=AA_p^2+A_pM^2$

De même $M\in P'$, $A'\in P'$ et $\overrightarrow{A_pA'}$ est orthogonal à P_{d_0} (c'est à dire colinéaire à $\vec{n}'$) donc $\overrightarrow{A_pA'}\cdot\overrightarrow{A'M}=0$ d'où on déduit par Pythagore la relation $A_pM^2=A_pA'^2+A'M^2$. En remplaçant dans la première on obtient $AM^2=AA_p^2+A_pA'^2+A'M^2$

En faisant $M=A'$ (qui est dans D d'après ce qui précède) dans la première relation on obtient $AA'^2=AA_p^2+A_pA'^2$ de sorte qu'on a $AM^2=AA'^2+A'M^2$ pour tout point M de D. Ceci montre que le produit scalaire $\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{A'M}$ est nul (c'est la réciproque du théorème de Pythagore) donc $\overrightarrow{AA'}$ est orthogonal à D. Comme $A'\in D$, ceci caractérise A' comme projeté orthogonal de A sur D.

5g On a vu en 5f qu'on a $AA_p^2+A_pA'^2=AA'^2$ car $\overrightarrow{AA_p}\cdot\overrightarrow{A_pA'}=0$. De même $\overrightarrow{AA_{P_{d_0}}}$ est orthogonal à P_{d_0} et $\overrightarrow{A_{P_{d_0}}A'}$ est dans la direction de P_{d_0} donc $\overrightarrow{AA_{P_{d_0}}}\cdot\overrightarrow{A_{P_{d_0}}A'}=0$ donc $AA'^2=AA_{P_{d_0}}^2+A_{P_{d_0}}A'^2$. En comparant avec la première relation il vient

$$AA_p^2+A_pA'^2=AA_{P_{d_0}}^2+A_{P_{d_0}}A'^2 \qquad (3)$$

$\overrightarrow{AA_p}$ est colinéaire à $\vec{n}$ comme $\overrightarrow{AA_{P_{d_0}}}$ est colinéaire à $\vec{n}'$. Or $\vec{n}\cdot\vec{n}'=0$ donc $\overrightarrow{AA_p}\cdot\overrightarrow{AA_{P_{d_0}}}=0$ donc $A_pA_{P_{d_0}}^2=AA_p^2+AA_{P_{d_0}}^2$

$\overrightarrow{A_pA'}$ est colinéaire à $\vec{n}'$ et $\overrightarrow{A'A_{P_{d_0}}}$ est dans la direction de $\vec{P}_{d_0}$ (car $A', A_{P_{d_0}}\in P_{d_0}$) donc $\overrightarrow{A_pA'}\cdot\overrightarrow{A'A_{P_{d_0}}}=0$

donc on a $A_pA_{P_{d_0}}^2=A_pA'^2+A'A_{P_{d_0}}^2$. En comparant les deux relations on obtient

$$AA_p^2+AA_{P_{d_0}}^2=A_pA'^2+A'A_{P_{d_0}}^2 \quad (4)$$

En soustrayant (4) à (3) on obtient $A_pA'^2-AA_{P_{d_0}}^2=AA_{P_{d_0}}^2-A_pA'^2$ d'où on déduit $A_pA'^2=AA_{P_{d_0}}^2$

En reportant dans la relation $AA'^2=AA_p^2+A_pA'^2$ on obtient $AA'^2=AA_p^2+AA_{P_{d_0}}^2$

5h. P' plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ avec $(a,b,c)\neq(0,0,0)$. Notons $\vec{m}$ le vecteur (a,b,c). $\vec{m}$ est un vecteur normal à P'

Notons $A_{p'}$ le projeté orthogonal de A sur P'. $A_{p'}$ est caractérisé par : $\overrightarrow{AA_{p'}}$ est colinéaire à $\vec{m}$: $\exists\lambda\in\mathbb{R},\ \overrightarrow{AA_{p'}}=\lambda\vec{m}=(\lambda a,\lambda b,\lambda c)$

et $A_{p'}\in P'$ autrement dit ses coordonnées vérifient l'équation de P'. $A_{p'}=A+\lambda\vec{m}=(1+\lambda a,\ 1+\lambda b,\ 1+\lambda c)$

donc $\lambda a^2+\lambda b^2+\lambda c^2\underbrace{+d}_{+a+b+c}=0$ ce qui donne $\lambda=-\dfrac{a+b+c+d}{a^2+b^2+c^2}$ (observons que $a^2+b^2+c^2>0$ car $(a,b,c)\neq(0,0,0)$)

Pour tout point M de P' on a $\overrightarrow{AA_{p'}}\cdot\overrightarrow{A_{p'}M}=0$ donc $AM^2=AA_{p'}^2+A_{p'}M^2$. En particulier $AM^2\geq AA_{p'}^2$ avec égalité ssi $M=A'$

(5h) Donc $d(A,P') := \inf_{M \in P'} AM = AA_{p'}$

On calcule $\vec{AA_{p'}} = \lambda \vec{n} = -\frac{a+b+c+d}{a^2+b^2+c^2}(a,b,c)$

$$AA_{p'} = \|\vec{AA_{p'}}\| = \sqrt{\frac{(a+b+c+d)^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}(a^2+b^2+c^2)} = \frac{|a+b+c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = d(A,P')$$

5i. D'après 5g on a $AA'^2 = AA_p^2 + AA_{P_{d_0}}^2$

Pour $M \in D$ on a $AM^2 = AA'^2 + A'M^2 \geq AA'^2$ avec égalité ssi $M = A'$ donc $d(A,D) := \inf_{M\in D} AM = AA'$

On calcule avec 5h $AA_p = \frac{|1-1+3+3|}{\sqrt{1+1+9}} = \frac{6}{\sqrt{11}} \rightsquigarrow AA_p^2 = \frac{36}{11}$

$$AA_{P_{d_0}}^2 = \frac{\left(5/11 + 17/11 + 4/11 + 4/11\right)^2}{(5/11)^2 + (17/11)^2 + (4/11)^2} = \frac{30^2}{330} = \frac{30}{11}$$

puis $AA'^2 = \frac{36}{11} + \frac{30}{11} = 6$

On obtient $d(A,D) = \sqrt{6}$ ce qui est conforme aux prévisions de 5b

6 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 9x+2y-6z+38 \\ 2x+9y+6z+17 \\ -6x+6y-7z-29 \end{pmatrix}$

6a les vecteurs $\frac{1}{11}(9,2,-6)$, $\frac{1}{11}(2,9,6)$, $\frac{1}{11}(-6,6,-7)$ (les vecteurs colonnes de la matrice) forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. On le vérifie en calculant les produits scalaires $\frac{1}{11}(9,2,-6)\cdot\frac{1}{11}(9,2,-6) = \frac{1}{11^2}(81+4+36) = 1$, $\frac{1}{11}(9,2,-6)\cdot\frac{1}{11}(2,9,6) = \frac{1}{11^2}(18+18-36) = 0$, ... (chaque vecteur est de norme 1, le produit scalaire d'un vecteur avec un autre est 0) Donc la matrice $A = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 9 & 2 & -6 \\ 2 & 9 & 6 \\ -6 & 6 & -7 \end{pmatrix}$ est orthogonale : elle vérifie ${}^tA\,A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

f est affine de partie linéaire l'application linéaire φ de matrice A : $f(x,y,z) = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 38 \\ 17 \\ -29 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + f(0,0,0)$

donc $\forall M, N \in \mathbb{R}^3$, $\underbrace{f(M) - f(N)}_{\vec{f(M)f(N)}} = \varphi(M) - \varphi(N) = \varphi(\underbrace{M-N}_{\vec{MN}})$

On a $\|\vec{f(M)f(N)}\| = \|\varphi(\vec{MN})\| = \|\vec{MN}\|$ En effet la matrice de φ dans la base orthonormée canonique de $\mathbb{R}^3$ est orthogonale donc φ préserve le produit scalaire, donc la norme.

Donc f préserve les distances : f est une isométrie.

(On aurait pu citer le théorème du cours qui dit qu'une application affine dont la partie linéaire est orthogonale est une isométrie.)

6b. On résoud $\begin{cases} 9x+2y-6z+38 = 11x \\ 2x+3y+6z+17 = 11y \\ -6x+6y-7z-29 = 11z \end{cases}$ soit $\begin{cases} -2x+2y-6z = -38 \\ 2x-2y+6z = -17 \\ -6x+6y-18z = 29 \end{cases}$

En ajoutant la première équation à la seconde on obtient $0 = -55$ impossible, donc il n'y a pas de solution. f n'admet pas de point fixe

6c On veut montrer que si (x,y,z) vérifie $x-y+3z+3=0$ alors $f(x,y,z)$ vérifie la même équation.

On calcule $\frac{1}{11}(9x+2y-6z+38) - \frac{1}{11}(2x+3y+6z+17) + \frac{3}{11}(-6x+6y-7z-29)+3 = \frac{1}{11}(-11x+11y-33z-66+33) = 0$

Donc $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $(x,y,z)\in P \Rightarrow f(x,y,z)\in P$

Pour $(x,y,z)\in P$ on calcule $f(x,y,z)-(x,y,z) = \frac{1}{11}(-2x+2y-6z+38,\ 2x-2y+6z+17,\ -6x+6y-18z-29)$

or $x-y+3z=-3$ donc $f(x,y,z)-(x,y,z) = \frac{1}{11}(6+38,\ -6+17,\ 18-29) = (4,1,-1)$

Conclusion $f|_P$ est la translation de vecteur $\vec{u} = (4,1,-1)$

6d. Soit $g = t_{-\vec{u}}\circ f$. D'après 6c $g|_P$ est l'identité. Puisque g est une isométrie, comme composée d'isométries, g est soit la symétrie orthogonale par rapport à P soit l'identité. Pour le décider on compare $g(M)$ à M pour M un point hors de P par exemple $M=(0,0,0)$ alors $f(M) = \frac{1}{11}(38,17,-29)$ et $t_{-\vec{u}}\circ f(M) = \frac{1}{11}(38-44,\ 17-11,\ -29+11) = \frac{1}{11}(-6,6,-18) \neq M$
donc g est la symétrie orthogonale par rapport à P.

~~Autre rédaction~~ Précisions notons s la symétrie orthogonale par rapport à P. Puisque g est une isométrie on a $\forall N\in P$ $MN = g(M)g(N)$
et comme $g(N)=N$ pour $N\in P$ on a $\forall N\in P$ $MN = g(M)N$. Autrement dit P est l'hyperplan médiateur du segment $[M, g(M)]$

donc $s(g(M)) = M$ par définition de s.
Notons $h = s\circ g$. h est une application affine comme composée d'applications affines. L'ensemble des points fixes de h est donc un sous espace affine de $\mathbb{R}^3$. Il contient P et le point M donc c'est $\mathbb{R}^3$ tout entier (cf la question 3).