L3 option géométrie — Corrigé de l'examen du 16 janvier 2006

1a C'est un sous-espace affine non vide de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$. Il s'écrit donc $A+\vec{P}$ où $A\in\mathbb{R}^3$ et $\vec{P}$ est un sous-espace vectoriel de dim 2 de $\mathbb{R}^3$

1b C'est la donnée d'un triplet (A, e_1, e_2) où A est un point du plan et (e_1, e_2) une base orthonormée de la direction de P.

1c Si on note P le plan affine, la projection orthogonale sur P est l'application $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $M\mapsto M_p$ où M_p est caractérisé par $M_p\in P$ et $\overrightarrow{MM_p}$ est orthogonal à P

Si on s'est donné un repère orthonormé (A, e_1, e_2) de P alors on a $M_p = A + (\overrightarrow{AM}\cdot e_1)\, e_1 + (\overrightarrow{AM}\cdot e_2)\, e_2$

2a $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ est la matrice ds la base canonique de $\mathbb{R}^2$ d'une rotation vectorielle $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+c^2=1 \\ b^2+d^2=1 \\ ab+cd=0 \\ ad-bc=1\end{cases}$

(les trois premières conditions disent que la matrice est orthogonale, la quatrième condition dit que son déterminant est 1)

2b $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ matrice d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite de $\mathbb{R}^2$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+c^2=1 \\ b^2+d^2=1 \\ ab+cd=0 \\ ad-bc=-1\end{cases}$

3a CNS : φ est injective. De façon équivalente $\operatorname{Ker}\varphi=\{0\}$

Un exemple : Soit f $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $x\mapsto(0,0,0)$ (l'application constante égale à 0). Soit D la droite passant par $(0,0,0)$ et de vecteur directeur $(1,0,0)$. Alors f est affine de partie linéaire l'application nulle. $f(D)$ est le ~~ss~~ ensemble de $\mathbb{R}^3$ formé du seul élément $(0,0,0)$

$f(D)$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ mais n'est pas une droite.

3b Si 1 n'est pas valeur propre de φ, ie si $\varphi - Id$ est injective, alors f admet un (et un seul) point fixe.

Un exemple : $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $x\mapsto x$ alors f est affine de partie linéaire Id. $\varphi - Id$ n'est pas injective mais f admet un point fixe (tout point de $\mathbb{R}^3$ est point fixe).

Exercices

4a. On forme $\overrightarrow{AB}=(1,-3,-2)$ et $\overrightarrow{AC}=(0,-1,-2)$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non nuls et non proportionnels donc A, B, C sont non alignés

4b. Le système d'équations de D est équivalent à $\begin{cases} 2x+y+z-5=0 \\ 2z-2=0\end{cases}$ soit $\begin{cases} z=1 \\ 2x+y-4=0\end{cases}$ soit $\begin{cases} z=1 \\ y=4-2x\end{cases}$

(x,y,z) est solution $\Leftrightarrow (x,y,z)=(0,4,1)+x(1,-2,0)$. On reconnaît la droite passant par $(0,4,1)$ et de vecteur directeur $(1,-2,0)$

Le point A' n'est pas dans D car ses coordonnées ne satisfont pas le syst. d'équations de D.

4c. Soit $B' = (0,4,1)$ et $C' = (1,2,1)$. B' et C' sont deux points distincts de D

$A' = (2,-2,-3)$ n'est pas dans D donc A', B', C' sont trois points de P_2 non alignés

Cherchons un vecteur normal à P_2 : $\vec{n} = (\alpha, \beta, \gamma) \perp P_2 \Leftrightarrow \vec{n}\cdot\overrightarrow{A'B'} = 0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{B'C'} = 0$

$$\Leftrightarrow -2\alpha + 6\beta + 4\gamma = 0 \text{ et } \alpha - 2\beta = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 2\beta \text{ et } \beta = -2\gamma$$

$$\Leftrightarrow (\alpha,\beta,\gamma) = \gamma(-4,-2,1)$$

On choisit $\gamma = 1$ de sorte que $\vec{n}$ est non nul.

On vérifie $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = -4+6-2 = 0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 2-2 = 0$ donc $\vec{n}$ est orthogonal à $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \vec{P_1}$

$\vec{n}$ est non nul et orthogonal à P_1 et à P_2 donc P_1 est parallèle à P_2

Maintenant $P_1 = P_2 \Leftrightarrow A \in P_2 \Leftrightarrow \vec{n}\cdot\overrightarrow{AA'} = 0 \Leftrightarrow -4\times 1 - 2\times(-4) + 1\times(-6) = 0$ ce qui n'est pas.

4d. G_A vérifie $\alpha\overrightarrow{A'G_A} + \beta\overrightarrow{AG_A} = 0$ soit $G_A = \alpha A' + \beta A = (2\alpha+\beta, -2\alpha+2\beta, -3\alpha+3\beta)$

4e. On a $\alpha\overrightarrow{A'G_\Pi} + \beta\overrightarrow{\Pi G_\Pi} = 0$ soit $\overrightarrow{A'G_\Pi} = -\beta\overrightarrow{\Pi A'} = \beta\overrightarrow{A'\Pi}$. C'est dire que G_Π est l'image de Π par l'homothétie h de centre A' et de rapport β.

Alors $\{G_\Pi, \Pi \in P_1\} = h(P_1) = h(A + \vec{P_1}) = h(A) + \vec{h}(\vec{P_1}) = G_A + \beta\,\mathrm{Id}(\vec{P_1})$

Si $\beta = 0$ alors $\beta\,\mathrm{Id}(\vec{P_1}) = \{0\}$ donc $h(P_1) = \{G_A\}$. C'est un point

Supposons $\beta \neq 0$ alors $\beta\,\mathrm{Id}(\vec{P_1}) = \vec{P_1}$ donc $h(P_1) = G_A + \vec{P_1}$ = plan passant par G_A ~~passant~~ parallèle à P_1.

$h(P_1) = P_1 \Leftrightarrow G_A \in P_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{AG_A} \in \vec{P_1}$

Or $\overrightarrow{AG_A} = \alpha\overrightarrow{AA'}$. $\overrightarrow{AA'} \notin \vec{P_1}$ car $A' \notin P_1$ (sinon on aurait $P_1 = P_2$ ce qui n'est pas d'après 4.c)

Donc $\overrightarrow{AG_A} \in \vec{P_1} \Leftrightarrow \alpha = 0$

Conclusion : $h(P_1) = P_1 \Leftrightarrow \alpha = 0$

4f. Si $\alpha \neq -1$ alors G'_Π est le barycentre du système $\{(\mathrm{bar}\{(A',\alpha),(B,1)\}, 1+\alpha), (\Pi,\beta)\}$ bien défini car $1+\alpha \neq 0$ et $1+\alpha+\beta = 2 \neq 0$

Notons $A'' = \mathrm{bar}\{(A',\alpha),(B,1)\}$. G'_Π est le barycentre du syst. $\{(A'', 1+\alpha), (\Pi,\beta)\}$. On est ainsi ramené à la question 4.e : Si $\beta \neq 0$ alors $\{G'_\Pi, \Pi \in P_1\}$ est le plan passant par $\mathrm{bar}\{(A'',1+\alpha),(A,\beta)\}$ et parallèle à P_1

Si $\alpha = -1$ on écrit $-\overrightarrow{A'G'_\Pi} + 2\overrightarrow{\Pi G'_\Pi} + \overrightarrow{BG'_\Pi} = 0$ soit $\overrightarrow{\Pi G'_\Pi} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'B}$ C'est dire que G'_Π est l'image de Π par la translation t de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{A'B}$.

Alors $\{G'_\Pi, \Pi \in P_1\} = t(P_1)$ = plan parallèle à P_1 passant par $t(A)$ $\quad (t(P_1) = t(A+\vec{P_1}) = t(A) + \mathrm{Id}(\vec{P_1}) = t(A) + \vec{P_1})$

5.a. Notons $A=(0,0,0)$ et $A_p=(x,y,z)$ le projeté orthogonal de A sur P

On a $\begin{cases} \overrightarrow{AA_p} \text{ proportionnel à } (1,-1,1) \text{ car } (1,-1,1) \text{ est un vecteur normal à } P \text{, donc } (x,y,z)=\lambda(1,-1,1) \text{ pour un } \lambda\in\mathbb{R} \\ A_p\in P \text{ soit } x-y+z-1=0 \text{ ce qui } \text{~~se traduit par~~ donne } \lambda+\lambda+\lambda-1=0 \text{ soit } \lambda=\frac{1}{3} \text{ donc } A_p=\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) \end{cases}$

$AA_p=\sqrt{\frac{3}{9}}=\frac{\sqrt{3}}{3}=d(A,P)$ En effet pour $M\in P$ on a $AM=\sqrt{AA_p^2+A_pM^2}\geq AA_p$ donc $\inf\limits_{M\in P} AM=AA_p$

On a $\overrightarrow{As(A)}=2\overrightarrow{AA_p}$ donc $As(A)=2\frac{\sqrt{3}}{3}$

s n'est pas linéaire car $s(0,0,0)=s(A)\neq(0,0,0)$

5b. Soit $M=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Posons $s(M)=(x',y',z')$. On a $\overrightarrow{Ms(M)}$ proportionnel à $(1,-1,1)$ (car le vecteur $(1,-1,1)$ est orthogonal à P et non nul)
donc $(x',y',z')=(x,y,z)+\lambda(1,-1,1)$ pour un $\lambda\in\mathbb{R}$.
D'autre part le milieu du segment $[M,s(M)]$ est dans P ce qui se traduit par $\frac{x+x'}{2}-\frac{y+y'}{2}+\frac{z+z'}{2}-1=0$
donc $x+\frac{\lambda}{2}-y+\frac{\lambda}{2}+z+\frac{\lambda}{2}-1=0$ soit $\lambda=\frac{2}{3}(1-x+y-z)$. On obtient $(x',y',z')=\Big(x(1-\frac{2}{3})+\frac{2}{3}y-\frac{2}{3}z+\frac{2}{3},\ y(1-\frac{2}{3})+\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}z-\frac{2}{3},$
$z(1-\frac{2}{3})-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}\Big)$

Ce qui s'écrit matriciellement $\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3 & 2/3 & -2/3\\ 2/3 & 1/3 & 2/3\\ -2/3 & 2/3 & 1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2/3\\-2/3\\2/3\end{pmatrix}$ On reconnaît sur cette expression la partie linéaire de s.

Sa matrice est $\begin{pmatrix}1/3 & 2/3 & -2/3\\ 2/3 & 1/3 & 2/3\\ -2/3 & 2/3 & 1/3\end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

5c. $s(D)$ est la droite passant par $s(A)=A+2\overrightarrow{AA_p}=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ (On peut utiliser les calculs de 5a ou de 5b) de vecteur directeur $\vec{s}(\vec{u})=\left(-\frac{2}{3},\frac{5}{3},-\frac{5}{3}\right)$ (d'après le calcul de la matrice de $\vec{s}$ en 5b)

$\vec{s}(\vec{u})$ n'est pas colinéaire à $\vec{u}$ donc $s(D)$ n'est pas confondue avec D.

5d. $s(D_{M,\vec{u}})$ est la droite passant par $s(M)$ et dirigée par $\vec{s}(\vec{u})$. On a $s(D_{M,\vec{u}})=D_{M,\vec{u}} \iff s(D_{M,\vec{u}})$ est parallèle à $D_{M,\vec{u}}$ et $M\in s(D_{M,\vec{u}})$
$\iff \vec{s}(\vec{u})$ est colinéaire à $\vec{u}$ et $\overrightarrow{Ms(M)}$ est colinéaire à $\vec{s}(\vec{u})$

Par définition de s on sait que $\overrightarrow{Ms(M)}$ est orthogonal à P ie appartient à $\vec{P}^\perp$, et que $\vec{s}$ est l'identité sur $\vec{P}$ et $-\mathrm{Id}$ sur $\vec{P}^\perp$.
On a $\mathbb{R}^3=\vec{P}\oplus\vec{P}^\perp$ et cette décomposition est la décomposition de $\mathbb{R}^3$ comme somme d'espaces propres pour $\vec{s}$. Donc $\vec{s}(\vec{u})$ est colinéaire à $\vec{u}$ ssi $\vec{u}\in\vec{P}$ ou $\vec{u}\in\vec{P}^\perp$
D'autre part $\overrightarrow{Ms(M)}\in\vec{P}^\perp$ est colinéaire à $\vec{s}(\vec{u})$ ssi $\overrightarrow{Ms(M)}=0$ ou si $\vec{s}(\vec{u})\in\vec{P}^\perp$
Les deux conditions sont satisfaites ssi $\vec{u}\in\vec{P}$ et $M\in P$ (car alors $M=s(M)$)
ou si $\vec{u}\in\vec{P}^\perp$ (car alors $s(\vec{u})\in\vec{P}^\perp$)
Le premier cas correspond à $D_{M,\vec{u}}\subset P$. Le second cas correspond à $D_{M,\vec{u}}\perp P$

5e Il faut distinguer suivant les deux cas de 5d : si $D_{M,\vec{u}}\subset P$ alors $s_{|D_{M,\vec{u}}}$ est l'identité car $s_{|P}$ est l'identité.
si $D_{M,\vec{u}}\perp P$ alors la restriction de $\vec{s}$ à la direction $\vec{D}_{M,u}$ de $D_{M,\vec{u}}$ est $-\mathrm{Id}$. De plus $D_{M,\vec{u}}$ intersecte P en le projeté orthogonal M_p de M sur P. Donc $s_{|D_{M,\vec{u}}}$ admet M_p comme point fixe et est de partie linéaire $-\mathrm{Id}$. C'est donc la symétrie centrale par rapport à M_p (ou homothétie de centre M_p de rapport -1).