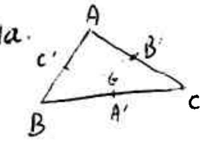
Licence L3 - option de géométrie Corrigé de l'examen du 31 janvier 2005

1. Soit X un espace affine euclidien de direction $\vec{X}$. Un repère orthonormé de X est une famille $(O, e_1, -, e_n)$ où O est un point de X et $(e_1, -, e_n)$ une base orthonormée de $\vec{X}$

2. $\dim X \leq 2$

3.
$$\begin{array}{ccccc} & & (4) & & \\ & & \Downarrow & & \\ (1) \Rightarrow (2) & \Leftarrow & (6) & \Rightarrow & (3) \\ & & \Uparrow & & \\ & & (5) & & \end{array}$$
et bien sûr la composée de deux implications est une implication. Par exemple $(4) \Rightarrow (2)$

4a. 

On a $\vec{CB'} = \frac{1}{2}\vec{CA}$ et $\vec{CA'} = \frac{1}{2}\vec{CB}$ donc $\vec{A'B'} = \vec{CB'} - \vec{CA'} = \frac{1}{2}(\vec{CA} - \vec{CB}) = -\frac{1}{2}\vec{AB}$

Comme A, B, C sont non alignés, $\vec{AB} \neq 0$ donc $\vec{A'B'} \neq 0$ c'est à dire $A' \neq B'$. On peut donc parler de la droite $(A'B')$

$\vec{A'B'}$ est un vecteur directeur de $(A'B')$; $\vec{AB}$ est un vecteur directeur de (AB), $\vec{A'B'}$ est colinéaire à $\vec{AB}$ donc $(A'B')$ est parallèle à (AB).

4b. G isobarycentre de A', B', C' $\Leftrightarrow$ $\vec{GA'} + \vec{GB'} + \vec{GC'} = 0$

Or $\vec{GA'} = \frac{1}{2}(\vec{GB} + \vec{GC})$ car $\vec{A'B} + \vec{A'C} = 0$.

De même $\vec{GB'} = \frac{1}{2}(\vec{GA} + \vec{GC})$, $\vec{GC'} = \frac{1}{2}(\vec{GA} + \vec{GB})$

En additionnant $\vec{GA'} + \vec{GB'} + \vec{GC'} = \frac{1}{2}(\vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GA} + \vec{GC} + \vec{GA} + \vec{GB}) = \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = 0$, la dernière égalité venant de ce que G est isobarycentre de A, B, C

4c. $\vec{A''G} + \vec{A''B} + \vec{A''C} = 0$ donc $\vec{A''G} + \vec{A''G} + \vec{GB} + \vec{A''G} + \vec{GC} = 0$ c'est à dire $3\vec{A''G} + \vec{GB} + \vec{GC} = 0$

De même $3\vec{B''G} + \vec{GA} + \vec{GC} = 0$

$3\vec{C''G} + \vec{GA} + \vec{GB} = 0$

En additionnant $3(\vec{A''G} + \vec{B''G} + \vec{C''G}) + 2(\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}) = 0$

Or G est isobarycentre de A, B, C donc $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = 0$ on obtient $\vec{A''G} + \vec{B''G} + \vec{C''G} = 0$ ce qui équivaut à G isobarycentre de A'', B'', C''

4d. On reprend les calculs de 4c. On avait $3\vec{A''G} + \vec{GB} + \vec{GC} = 0$. Or $\vec{GB} + \vec{GC} = -\vec{GA}$ donc $3\vec{A''G} - \vec{GA} = 0$ soit $\vec{GA''} = -\frac{1}{3}\vec{GA}$

De même $\vec{GB''} = -\frac{1}{3}\vec{GB}$ et $\vec{GC''} = -\frac{1}{3}\vec{GC}$. C'est exactement dire que A'', B'' et C'' sont les images de A, B et C respectivement par l'homothétie de centre G de rapport $-\frac{1}{3}$

Cette homothétie est une application affine. Une application affine est uniquement déterminée par ses valeurs en les points d'un repère affine. Or A, B, C sont trois points non alignés de $\mathbb{R}^2$ qui est un espace affine de dimension 2, donc (A, B, C) est un repère affine de $\mathbb{R}^2$, donc il existe une et une seule application affine $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ transformant (A, B, C) en (A'', B'', C'').

4e. Notons h l'homothétie de centre G de rapport $-\frac{1}{3}$. La partie linéaire de h est l'homothétie vectorielle de rapport $-\frac{1}{3}$.

Donc $\vec{A''B''} = \overrightarrow{h(A)h(B)} = -\frac{1}{3}\vec{AB}$.

Puisque $\vec{AB} \neq 0$, $\vec{A''B''} \neq 0$ donc $A'' \neq B''$ et la droite $(A''B'')$ est bien définie.

Puisque $\vec{A''B''}$ est colinéaire à $\vec{AB}$, $(A''B'')$ est parallèle à (AB)

On aurait aussi bien pu dire que l'image d'une droite par une homothétie de rapport $\neq 0$ est une droite qui lui est parallèle.

4f h (l'homothétie de centre G de rapport $-\frac{1}{3}$) est une application affine donc elle conserve les barycentres. Ainsi $h(G)$ est l'isobarycentre des points $h(A), h(B), h(C)$. Or $h(G) = G$ et $h(A) = A''$, $h(B) = B''$, $h(C) = C''$.

5a. $P \subset \mathbb{R}^3$ plan d'équation $x + 2y + 3z = 4$. Alors $\vec{n} = (1,2,3)$ est un vecteur normal à P. On choisit un point de P en prenant $y = z = 0 \rightsquigarrow x = 4$. Notons A ce point.

Soient O le pt $(0,0,0)$ et O_p le projeté orthogonal de O sur P. On a $s_p(O) = O + 2\overrightarrow{OO_p}$. Il s'agit de déterminer $\overrightarrow{OO_p}$.

Comme $\overrightarrow{OO_p}$ est orthogonal à P, $\overrightarrow{OO_p}$ est colinéaire à $\vec{n}$: $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ $\overrightarrow{OO_p} = \lambda \vec{n}$

D'autre part $\overrightarrow{O_pA} \in \vec{P}$ donc est orthogonal à $\vec{n}$: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{O_pA} = 0$. Comme $\overrightarrow{O_pA} = \overrightarrow{O_pO} + \overrightarrow{OA}$ on obtient l'équation $\vec{n} \cdot \overrightarrow{OA} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{OO_p}$

En reportant $\overrightarrow{OO_p} = \lambda \vec{n}$ dans l'équation on obtient $\vec{n} \cdot \overrightarrow{OA} = \lambda \vec{n} \cdot \vec{n}$

$\overrightarrow{OA} = (4,0,0)$, $\vec{n} = (1,2,3)$ donc $\vec{n} \cdot \overrightarrow{OA} = 4$ et $\vec{n} \cdot \vec{n} = 1 + 4 + 9 = 14$ puis $\lambda = \frac{2}{7}$

$s_p(O) = O + 2\lambda \vec{n} = \left(\frac{4}{7}, \frac{8}{7}, \frac{12}{7}\right)$

Autre méthode pour déterminer λ : Notons (x,y,z) les coordonnées de O_p. On a $\overrightarrow{OO_p} = \lambda \vec{n}$ ce qui se traduit par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda \\ 3\lambda \end{pmatrix}$$

D'autre part $O_p \in P$ donc $x + 2y + 3z = 4$. On obtient $\lambda + 4\lambda + 9\lambda = 4$ soit $\lambda = \frac{2}{7}$.

Si s_p était linéaire on aurait $s_p(0,0,0) = (0,0,0)$ ce qui n'est pas le cas.

5b. s_p est une application affine bijective donc l'image d'une droite par s_p est une droite (cf cours).

Si A et B sont deux points distincts de $\mathbb{R}^3$ on a $s_p(A) \neq s_p(B)$ (car s_p est bijective) et l'image par s_p de la droite (AB) est l'unique droite passant par $s_p(A)$ et $s_p(B)$

Soit D la droite passant par $(0,0,0)$ et de vecteur directeur $(1,2,3)$. On prend $A = O = (0,0,0)$ et pour B l'intersection de la droite D avec le plan P. (L'existence de cette intersection est donnée par le calcul qui suit.)

$B = A + \lambda(1,2,3)$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. $B \in P$ se traduit par $(\lambda, 2\lambda, 3\lambda)$ solution de $x + 2y + 3z = 4$ c'est à dire $\lambda = \frac{2}{7}$

(Observer qu'on a $B = O_p$ avec les notations de 5a)

Alors $s_p(B) = B$ (puisque $B \in P$) et $s_p(A) = \left(\frac{4}{7}, \frac{8}{7}, \frac{12}{7}\right)$ (d'après 5a)

$= \left(\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}\right)$

On calcule $\overrightarrow{s_p(A)\, s_p(B)} = \left(-\frac{2}{7}, -\frac{4}{7}, -\frac{6}{7}\right) = -\overrightarrow{AB}$ donc les droites (AB) et $(s_p(A)\, s_p(B))$ sont parallèles.

$B = s_p(B)$ est un point commun à (AB) et à $(s_p(A)\, s_p(B))$ donc ces droites sont confondues.

(5b) Autre méthode :

Notons φ la partie linéaire de s_P. φ est la symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^3$ par rapport à la direction $\vec{P}$ de P.

L'image de la droite D passant par $\underset{=(0,0,0)}{O}$ et de vecteur directeur $\vec{n}=(1,2,3)$ est la droite passant par $s_P(O)$ et de vecteur directeur $\varphi(\vec{n})$. ($\varphi(\vec{n})\neq 0$ car φ est bijective)

Or $\vec{n}\in\vec{P}^{\perp}$ donc $\varphi(\vec{n})=-\vec{n}$

De plus $s_P(O)=O+\mu\vec{n}$ pour un certain $\mu\in\mathbb{R}$ (puisque $\vec{n}$ est un vecteur normal à P) donc $s_P(O)\in D$

Les droites D et $s_P(D)$ ont le point $s_P(O)$ en commun et ont des vecteurs directeurs colinéaires donc sont égales.

5c. $P'\subset\mathbb{R}^3$ plan d'équation $x+2y+3z=0$. P' et P admettent un même vecteur normal $\vec{n}=(1,2,3)$ donc sont parallèles.

On étudie la composée $s_P\circ s_{P'}$:

Pour M un point de $\mathbb{R}^3$ on note M_P, resp. $M_{P'}$, le projeté orthogonal de M sur P, resp sur P'. $\overrightarrow{MM_P}$ et $\overrightarrow{MM_{P'}}$ sont colinéaires à $\vec{n}$.

On écrit $s_{P'}(M)=M+2\overrightarrow{MM_{P'}}$ et $s_P\big(s_{P'}(M)\big)=s_{P'}(M)+2\,\overrightarrow{s_{P'}(M)\big(s_{P'}(M)\big)_P}$

On observe $\big(s_{P'}(M)\big)_P=M_P$ puisque $\overrightarrow{s_{P'}(M)M_P}=\overrightarrow{MM_P}-2\overrightarrow{MM_{P'}}$ est colinéaire à $\vec{n}$ et puisque $M_P\in P$.

On obtient $s_P(s_{P'}(M))=s_{P'}(M)+2\,\overrightarrow{s_{P'}(M)M_P}$

$$=M+2\overrightarrow{MM_{P'}}+2\,\overrightarrow{s_{P'}(M)M}+2\overrightarrow{MM_P}=M+2\overrightarrow{MM_{P'}}-4\overrightarrow{MM_{P'}}+2\overrightarrow{MM_P}=M+2\overrightarrow{M_{P'}M_P}$$

On détermine $\overrightarrow{M_{P'}M_P}$ en écrivant $M_P=M+\lambda\vec{n}$ pour un $\lambda\in\mathbb{R}$ et $M_{P'}=M+\mu\vec{n}$ pour un $\mu\in\mathbb{R}$

d'où $\overrightarrow{M_{P'}M_P}=(\lambda-\mu)\vec{n}$. En particulier $\overrightarrow{M_{P'}M_P}\cdot\vec{n}=(\lambda-\mu)\,\vec{n}\cdot\vec{n}$

D'autre part $\overrightarrow{M_{P'}M_P}=\overrightarrow{M_{P'}O}+\overrightarrow{OO_P}+\overrightarrow{O_PM_P}$ et on observe $M_{P'},O\in P'$; $O_P,M_P\in P$ donc $\overrightarrow{M_{P'}M_P}\cdot\vec{n}=\overrightarrow{OO_P}\cdot\vec{n}$

On obtient $\lambda-\mu=\dfrac{\overrightarrow{OO_P}\cdot\vec{n}}{\vec{n}\cdot\vec{n}}=\dfrac{2}{7}$

En reportant : $s_P(s_{P'}(M))=M+\frac{4}{7}\vec{n}$. On reconnaît l'image de M par la translation de vecteur $\frac{4}{7}\vec{n}=\left(\frac{4}{7},\frac{8}{7},\frac{12}{7}\right)$.

6a. $t_{\vec{u}}$ est une application affine de partie linéaire id ; r_α est une application affine de partie linéaire elle même.

Donc $f=t_{\vec{u}}\circ r_\alpha$ est une application affine de partie linéaire $\mathrm{id}\circ r_\alpha=r_\alpha$.

On sait que f admet un et un seul point fixe si (et seulement si) 1 n'est pas valeur propre de sa partie linéaire.

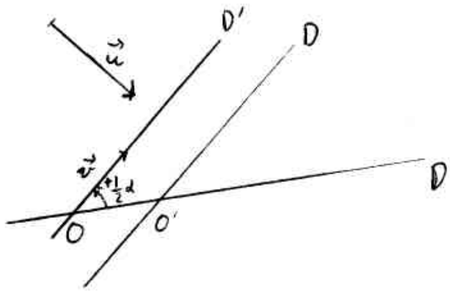
On calcule le polynôme caractéristique $\chi_{r_\alpha}=\det\begin{pmatrix}\cos\alpha-X & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha-X\end{pmatrix}=X^2-2X\cos\alpha+1$

1 est racine de $\chi_{r_\alpha}\iff 2(1-\cos\alpha)=0\iff\alpha\equiv 0\ [2\pi]$ ce qui n'est pas le cas par hypothèse.

Soit O l'unique point fixe de f. On a pour tout $M\in\mathbb{R}^2$ $f(M)=f(O)+r_\alpha(\overrightarrow{OM})=O+r_\alpha(\overrightarrow{OM})$. On reconnaît la définition de la rotation de centre O d'angle α relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

6b. $t_{\vec{u}} = s_D \circ s_{D'}$ dès que $\vec{u} \perp D$ et $D' = t_{-\frac{1}{2}\vec{u}}(D)$

$r_\alpha = s_D \circ s_{D'}$ dès que $O \in D$ et $D' = r_{-\frac{1}{2}\alpha}(D)$



Soit $\vec{v}$ un vecteur non nul orthogonal à $\vec{u}$.

Soit D' la droite passant par O de vecteur directeur $\vec{v}$.

On pose $D = t_{\frac{1}{2}\vec{u}}(D')$ et $D'' = r_{-\frac{1}{2}\alpha}(D')$ (D et D'' sont bien des droites car chacune image d'une droite par une application affine bijective.)

Alors $r_\alpha = s_{D'} \circ s_{D''}$ et $D' = t_{-\frac{1}{2}\vec{u}}(D)$ donc $t_{\vec{u}} = s_D \circ s_{D'}$

6c. On calcule $t_{\vec{u}} \circ r_\alpha = s_D \circ s_{D'} \circ s_{D'} \circ s_{D''} = s_D \circ s_{D''}$ car $s_{D'} \circ s_{D'} = id$.

D' et D'' sont deux droites sécantes en O : si ce n'était pas le cas elles seraient confondues (car elles passent par O) et on aurait $s_{D'} \circ s_{D''} = id$ donc $r_\alpha = id$ ce qui est exclu car $\alpha \not\equiv 0\ [2\pi]$

Donc D et D'' sont non parallèles. Comme D est parallèle à D', D et D'' sont non parallèles donc sont sécantes. Appelons O' le point d'intersection.

$$\left.\begin{aligned} &\text{On a } O' \in D'' \text{ donc } s_{D''}(O') = O' \\ &O' \in D \text{ donc } s_D(O') = O' \end{aligned}\right) \text{ donc } s_D \circ s_{D''}(O') = O' \text{ : } O' \text{ est le point fixe de } t_{\vec{u}} \circ r_\alpha$$

(point fixe unique d'après 6a)

6d. Puisque $f(O') = O'$ on a $f(f(O')) = O'$. D'autre part la partie linéaire de $f \circ f$ est $r_\alpha \circ r_\alpha \underset{\uparrow \text{ calcul matriciel}}{=} r_{2\alpha}$. C'est bien dire que $f \circ f$ est la rotation de centre O' d'angle 2α par rapport à la base canonique.

6e. Soit $M \in \mathbb{R}^2$. On suppose $M \neq f(M)$ et $M = f \circ f(M)$.

Alors $M \neq O'$ et $r_{2\alpha}(\overrightarrow{O'M}) = \overrightarrow{f \circ f(O')\, f \circ f(M)} = \overrightarrow{O'M}$. Donc 1 est valeur propre de $r_{2\alpha}$ ce qui entraîne $2\alpha \equiv 0\ [2\pi]$ (cf question 6a) c'est à dire $\alpha \equiv 0\ [2\pi]$ ou $\alpha \equiv \pi\ [2\pi]$. Le premier cas est exclu par hypothèse sur α.

Le second cas entraîne que r_α a pour matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ donc que f est la symétrie centrale par rapport à O'.

On a alors pour tout point M O' milieu de $[M, f(M)]$.

6f. Si $M = f(M)$ ils ont même image par f et on obtient $M = f(M) = f \circ f(M)$ ce qui est exclu.

Comme f est bijective, $f(M) = f \circ f(M)$ équivaut à $M = f(M)$ et on vient de voir que cela est exclu.

Donc $M \neq f(M)$ et $f(M) \neq f \circ f(M)$. On peut donc parler des médiatrices des segments $[M, f(M)]$ et $[f(M), f \circ f(M)]$ qu'on note Δ et Δ' respectivement.

On a $M = s_\Delta(f(M))$ et $f \circ f(M) = s_{\Delta'}(f(M))$, où s_Δ et $s_{\Delta'}$ désignent les symétries orthogonales par rapport à Δ et Δ'.

Si $\Delta = \Delta'$ alors $M = s_\Delta(f(M)) = s_{\Delta'}(f(M)) = f \circ f(M)$ ce qui est exclu. Donc Δ et Δ' sont non confondues.

On a $O'M = O'f(M)$ car $f(O') = O'$ et f est une isométrie. Donc $O' \in \Delta$ (par définition de Δ).

De même $O'f(M) = O'f(f(M))$ donc $O' \in \Delta'$ donc $O' \in \Delta \cap \Delta'$. Comme Δ et Δ' sont non confondues, elles sont sécantes en O'.