Licence L3 - option de Géométrie — Corrigé de l'examen du 11 janvier 2007

Q1 $G = B \iff \alpha = \gamma = 0$ Ni a ni b ni c ni d ne garantissent $G = B$

Q2 $G \in [A,B] \iff \alpha$ et β ont même signe. b et c le garantissent

Q3 a $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une rotation si et seulement si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale de déterminant 1

et est différente de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (sinon l'application donnée est la translation de vecteur $(1,1)$)

La condition peut donc s'écrire $\exists \theta \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Q3 b On reconnait la composée de la translation de vecteur $(1,1)$ avec la symétrie axiale d'axe $\mathrm{Vect}\left(\left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\right)\right)$

On peut écrire $(1,1) = \left((1,1) \mid \left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\right)\right) \cdot \left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\right) + v = \left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\right) + v$ avec $v \perp \left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\right)$

$t_v \circ s_{\mathrm{Vect}\left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\right)}$ est la symétrie axiale d'axe la droite passant par $\frac{v}{2}$ de vecteur directeur $\left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\right)$

$\left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\right)$ est un vecteur parallèle à l'axe de cette symétrie. La composée de la translation par ce vecteur avec la symétrie admet un point fixe si et seul^t si ce vecteur est nul.

La condition est donc $\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2} = 0$ soit $\frac{\theta}{2} = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ pour un $k \in \mathbb{Z}$ soit $\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ pour un $k \in \mathbb{Z}$

On a déjà dit ce qu'était l'application lorsque cette condition est satisfaite.

4a L'expression matricielle de h est $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ d'où la matrice de la partie linéaire de h ds la base canonique $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

4b On cherche (x,y) tq $h(x,y) = (x,y)$ soit $\begin{cases} 2x + 5y + 1 = 0 \\ -2x - 5y - 1 = 0 \end{cases}$ On obtient l'éq. cartésienne d'une droite, ensemble des pts fixes de h

4c D est la droite passant par A de vecteur directeur $\vec{AB} = (2,-2)$. On a $h(A) = (22,-17) = A + 10\,\vec{AB} \in D$

$h(B) = (18,-13) = A + 8\,\vec{AB} \in D$

D est le ss espace affine engendré par A et B donc $h(D)$ est le ss esp. affine engendré par $h(A)$ et $h(B)$ donc $h(D) \subset D$

Comme $h(A) \neq h(B)$ on a en fait $h(D) = D$

4d On pose $g : D \to D$, $M \mapsto h(M)$. g est affine comme restriction d'une application affine.

Notons φ la partie linéaire de g : $\varphi : \vec{D} \to \vec{D}$

On a $\varphi(\vec{AB}) = \overrightarrow{g(A)g(B)} = \overrightarrow{h(A)h(B)} = (18,-13) - (22,-17) = (-4,4) = -2\,\vec{AB}$

On a $\vec{D} = \mathrm{Vect}(\vec{AB}) = \{\lambda \vec{AB}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ et $\varphi(\lambda \vec{AB}) = \lambda\,\varphi(\vec{AB}) = -2\lambda\,\vec{AB}$

Conclusion $\varphi = -2\,\mathrm{Id}_{\vec{D}}$ donc g est une homothétie de rapport -2. On peut chercher le centre de cette homothétie en cherchant $\lambda \in \mathbb{R}$ tq $g(A + \lambda\vec{AB}) = A + \lambda\vec{AB}$ soit $(22,-17) - 2\lambda\,\vec{AB} = (2,3) + \lambda\,\vec{AB}$. On obtient $\lambda = \frac{10}{3}$

g est l'homothétie de D de centre $A + \frac{10}{3}\vec{AB} = \left(\frac{26}{3}, -\frac{11}{3}\right)$ de rapport -2

Attention : h n'est pas une homothétie !

4e Notons φ la partie linéaire de h

D' est la droite passant par $(-\frac{3}{2},0)$ de vecteur directeur $(5,-2)$ donc $h(D')$ est le ss espace affine passant par $h((-\frac{3}{2},0))$ et de direction $\mathrm{Vect}(\varphi(5,-2))$

On a $\varphi((5,-2)) = (5,-2)$ (on utilise 4a) donc $\overrightarrow{h(D')} = \overrightarrow{D'}$ donc $h(D')$ est une droite parallèle à D'

5a Les points A, B, C ne sont pas alignés car les vecteurs $\vec{AB} = (0,1,0)$ et $\vec{AC} = (-1,3,-1)$ ne sont pas proportionnels.

Dans le plan $\mathcal{P}$ les droites (AB) et (AC) ne sont pas parallèles donc les médiatrices des segments $[AB]$ et $[AC]$ ne sont pas parallèles donc elles se coupent en un unique point. Notons O ce point. On a $OA = OB$ car $O \in$ médiatrice de $[AB]$ et de même $OA = OC$

Réciproquement si O est un point de $\mathcal{P}$ vérifiant $OA = OB = OC$ alors $O \in$ médiatrice de $[AB]$ et $O \in$ médiatrice de $[AC]$ d'où l'unicité.

5b Puisque $A \neq B$ l'ensemble des pts M de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $MA = MB$ est l'hyperplan médiateur du segment $[AB]$ donc un plan.

Précisément notons I le milieu de $[AB]$. On a $MA = MB \Leftrightarrow MA^2 = MB^2$

$$\Leftrightarrow MI^2 + IA^2 + 2\vec{MI}\cdot\vec{IA} = MI^2 + IB^2 + 2\vec{MI}\cdot\vec{IB}$$

$$\Leftrightarrow \vec{MI}\cdot\vec{AB} = 0$$

L'ensemble $\{M \in \mathbb{R}^3, MA = MB\}$ est donc le plan passant par I orthogonal à $\vec{AB}$.

On a $\vec{AB} = (0,1,0)$ donc le plan admet une équation de la forme $0x + 1\cdot y + 0\cdot z = d$ pour un $d \in \mathbb{R}$

Puisque $I = (1, \frac{1}{2}, 2)$ appartient au plan médiateur on a $d = \frac{1}{2}$ d'où l'équation $y = \frac{1}{2}$

De même l'ensemble des $M \in \mathbb{R}^3$ tq $MA = MC$ est l'hyperplan médiateur de $[AC]$ donc le plan orthogonal à $\vec{AC}$ passant par le milieu de $[AC]$

On a $\vec{AC} = (-1,3,-1)$ donc le plan admet une équation de la forme $-x+3y-z = e$ pour un $e \in \mathbb{R}$

$(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ appartient au plan donc $e = -\frac{1}{2} + \frac{9}{2} - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$ d'où l'équation $-x+3y-z = \frac{5}{2}$

5c Notons $\mathcal{P}_1$ l'hyperplan médiateur de $[AB]$ et $\mathcal{P}_2$ celui de $[AC]$. $\mathcal{P}_1$ n'est pas parallèle à $\mathcal{P}_2$ puisque $\vec{AB}$ n'est pas proportionnel à $\vec{AC}$ donc $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est une droite. Notons la D

$$\text{On a } \left.\begin{array}{l} MA = MB \Leftrightarrow M \in \mathcal{P}_1 \\ MA = MC \Leftrightarrow M \in \mathcal{P}_2 \end{array}\right\} \quad \text{donc } MA = MB = MC \Leftrightarrow M \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = D$$

Le vecteur $\vec{AB}$ est orthogonal à $\vec{\mathcal{P}_1}$ et $\vec{D} \subset \vec{\mathcal{P}_1}$ donc $\vec{AB}$ est orthogonal à $\vec{D}$. De même $\vec{AC}$ est orthogonal à $\vec{\mathcal{P}_2}$ et $\vec{D} \subset \vec{\mathcal{P}_2}$ donc $\vec{AC}$ est orthogonal à $\vec{D}$.

Donc $\vec{D}$ est orthogonale à $\mathrm{Vect}(\vec{AB}, \vec{AC}) = \vec{\mathcal{P}}$

Pour obtenir un vecteur directeur de $\vec{D}$ il suffit d'exhiber un vecteur non nul orthogonal à $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$, par ex le produit vectoriel

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right) = (-1, 0, 1)$$

5d $\mathcal{D} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ admet pour système d'équation $\begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ -x+3y-z = \frac{5}{2} \end{cases}$ ce qui équivaut à $\begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ x+z = -1 \end{cases}$, d'où une solution particulière

$(0, \frac{1}{2}, -1)$. $\mathcal{D}$ est la droite passant par $(0, \frac{1}{2}, -1)$ de vecteur directeur $(-1, 0, 1)$ d'où un paramétrage $\mathbb{R} \to \mathcal{D}, \lambda \mapsto (-\lambda, \frac{1}{2}, \lambda - 1)$ $= M_\lambda$

5e On a $\vec{AM_\lambda} = (-1-\lambda, \frac{1}{2}, \lambda - 3)$ donc $AM_\lambda^2 = (1+\lambda)^2 + \frac{1}{4} + (\lambda-3)^2 = 2\lambda^2 - 4\lambda + \frac{1}{4} + 10$

$= 2(\lambda-1)^2 + \frac{1}{4} + 8$

On a $O \in \mathcal{D}$ puisque $OA = OB = OC$. et $O \in \mathcal{P}$ par construction.

Pour $M \in \mathcal{D}$ on a $\vec{OM} \in \vec{\mathcal{D}}$ et $\vec{OA} \in \vec{\mathcal{P}}$ donc $\vec{OM}$ est orthogonal à $\vec{OA}$ donc $AM^2 = OA^2 + OM^2$ (Thm de Pythagore)

donc $AM^2 \geqslant OA^2$ avec égalité si et seulement si $M = O$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on a calculé $AM_\lambda^2 = 2(\lambda-1)^2 + \frac{1}{4} + 8$. AM_λ^2 est minimal pour $\lambda = 1$ donc $O = M_1 = (-1, \frac{1}{2}, 0)$

6a L'ensemble des points fixes de $s_\mathcal{D}$ est $\mathcal{D}$

6b Supposons $A \neq B$ alors $s_\mathcal{D}(A) = B \iff \mathcal{D}$ est la médiatrice de $[AB] \iff s_\mathcal{D}(B) = A$

Si $A = B$ et $s_\mathcal{D}(A) = B$ alors clairement $s_\mathcal{D}(B) = A$.

6c On a $s_\mathcal{D}(A) = A \iff A \in \mathcal{D}$

Supposons $s_\mathcal{D}(A) \neq A$ alors $s_\mathcal{D}(A) \in \{B, C\}$. Supposons par exemple $s_\mathcal{D}(A) = B$ alors $s_\mathcal{D}(B) = A$ par 6b. Comme $s_\mathcal{D}$ est bijective et

$\{s_\mathcal{D}(A), s_\mathcal{D}(B), s_\mathcal{D}(C)\} = \{A, B, C\}$ et A, B, C sont distincts nécessairement $s_\mathcal{D}(C) = C$ donc $C \in \mathcal{D}$

Comme A, B, C sont non alignés, on ne peut avoir $A, B, C \in \mathcal{D}$. Supposons par exemple $A \notin \mathcal{D}$ alors $s_\mathcal{D}(A) \neq A$ donc $s_\mathcal{D}(A) \in \{B, C\}$

Supposons par exemple $s_\mathcal{D}(A) = B$ alors $s_\mathcal{D}(C) = C$ d'après ce qui précède.

$s_\mathcal{D}$ est une isométrie donc $AC = s_\mathcal{D}(A) s_\mathcal{D}(C) = BC$

6d. Supposons par l'absurde A, B, C alignés alors l'un des points est dans le segment reliant les deux autres points. Par exemple $B \in [AC]$

On a alors $AC = AB + BC$ donc l'hypothèse $AB = AC = BC$ entraine $AC = 2AC$ soit $AC = 0$ en contradiction avec l'hypothèse $AC \neq 0$

6e D'après notre raisonnement en 6b et 6c on a $\{s_\mathcal{D}(A), s_\mathcal{D}(B), s_\mathcal{D}(C)\} = \{A, B, C\}$ si et seulement si l'un des points A, B ou C est sur $\mathcal{D}$ et si $\mathcal{D}$ est la médiatrice du segment reliant les deux autres points.

On a donc trois possibilités pour $\mathcal{D}$: $\mathcal{D} =$ médiatrice de $[AB]$ ou $\mathcal{D} =$ médiatrice de $[BC]$ ou $\mathcal{D} =$ médiatrice de $[AC]$

Si $\mathcal{D}$ est la médiatrice de $[AB]$, ~~alors~~ comme $AC = BC$ on a $C \in \mathcal{D}$ donc $s_\mathcal{D}(C) = C$ donc $s_\mathcal{D}(A) s_\mathcal{D}(B) s_\mathcal{D}(C) = ABC$

De même pour les deux autres cas.

6f. On sait que la composée de deux symétries axiales d'axe concourant est une rotation.

Notons $\mathcal{D}$ la médiatrice de $[AB]$ et $\mathcal{D}'$ la médiatrice de $[BC]$. On a
$$\left.\begin{aligned} s_\mathcal{D} \circ s_{\mathcal{D}'}(A) &= s_\mathcal{D}(A) = B \\ s_\mathcal{D} \circ s_{\mathcal{D}'}(B) &= s_\mathcal{D}(C) = C \\ s_\mathcal{D} \circ s_{\mathcal{D}'}(C) &= s_\mathcal{D}(B) = A \end{aligned}\right)$$
donc $s_\mathcal{D} \circ s_{\mathcal{D}'}$ convient.

Le centre de la rotation $s_\mathcal{D} \circ s_{\mathcal{D}'}$ est l'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ (qui sont aussi des médianes de ABC) donc le centre de gravité du triangle ABC

6g Soit r une rotation transformant A, B, C en B, C, A respectivement. Notons O le centre de r et φ la partie linéaire de r

φ est une rotation vectorielle et $\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{r(A)r(B)} = \overrightarrow{BC}$ donc φ est uniquement déterminée

On a $OA = r(O)r(A) = OB$ et $OB = r(O)r(B) = OC$ donc O appartient à la médiatrice de $[AB]$ et à la médiatrice de $[BC]$

Comme $A \neq C$ les médiatrices ne sont pas confondues donc O est uniquement déterminé.

Conclusion r est uniquement déterminé.

((On aurait pu utilisé l'argument meilleur suivant : puisque $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère cartésien de $\mathbb{R}^2$, une appl. affine $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est déterminée par ses valeurs en A, B, C

Rq : O est le centre de gravité de ABC (6f) et r est la rotation de centre O d'angle $\frac{2\pi}{3}$ pour une orientation convenable de $\mathbb{R}^2$ (celle donnée par la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$)

~~Soit~~ On connait trois rotations transformant le triangle ABC en lui même : l'application Id, r construit en 6f et r^{-1}

$r^{-1}(A) = C$, $r^{-1}(C) = B$ et $r^{-1}(B) = A$ donc $r \neq r^{-1}$

Montrons que ce sont les seules rotations transformant ABC en lui même : Soit r' une telle rotation, on a $\{r'(A), r'(B), r'(C)\} = \{A, B, C\}$

et on sait que r' est une application affine donc est déterminée par sa restriction à $\{A, B, C\}$

On a 6 possibilités pour la restriction de r' à $\{A, B, C\}$:

$A \mapsto A$	$A \mapsto B$	$A \mapsto C$	$A \mapsto A$	$A \mapsto B$	$A \mapsto C$
$B \mapsto B$	$B \mapsto C$	$C \mapsto B$	$B \mapsto C$	$B \mapsto A$	$B \mapsto B$
$C \mapsto C$	$C \mapsto A$	$B \mapsto A$	$C \mapsto B$	$C \mapsto C$	$C \mapsto A$

Les trois premiers cas correspondent à Id, r, r^{-1}. Le quatrième cas correspond à $s_{D'}$, le cinquième à s_D et le sixième à $s_{D''}$ où D'' est la médiatrice de $[AC]$. Ces trois derniers cas font intervenir des symétries axiales qui ne peuvent se confondre avec une rotation.

*6h D'après 6g ~~chaque~~ une application affine de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ transformant ABC en lui même est déterminée par sa restriction à $\{A, B, C\}$

On ne trouve que 6 applications : $Id, r, r^{-1}, s_D, s_{D'}, s_{D''}$. Leurs compositions ~~et~~ sont déterminées par la composition des permutations de $\{A, B, C\}$ correspondantes. On obtient la table de multiplication

$\circ$	id	r	r^{-1}	s_D	$s_{D'}$	$s_{D''}$
id	id	r	r^{-1}	s_D	$s_{D'}$	$s_{D''}$
r	r	r^{-1}	id	$s_{D''}$	s_D	$s_{D'}$
r^{-1}	r^{-1}	id	r	$s_{D'}$	$s_{D''}$	s_D
s_D	s_D	$s_{D'}$	$s_{D''}$	id	r	r^{-1}
$s_{D'}$	$s_{D'}$	$s_{D''}$	s_D	r^{-1}	id	r
$s_{D''}$	$s_{D''}$	s_D	$s_{D'}$	r	r^{-1}	id

Autre méthode :

Une application affine préserve le barycentre donc une application affine ~~préservan~~ transformant le triangle ABC en lui même fixe son centre de gravité. Une isométrie de $\mathbb{R}^2$ admettant un point fixe est soit une rotation soit une symétrie axiale. Les symétries axiales laissant invariant le triangle ABC ont été déterminées en 6e, les rotations en 6g.

6i On a $AB^2 = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2 + \sqrt{2}$, $BC^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$

$AB \neq BC$ donc il n'existe pas de rotation r tq $\overrightarrow{r(A)r(B)} = \overrightarrow{BC}$