L3 géometrie

Corrigé de la feuille 1

1. Une droite de $\mathbb{R}^2$ a une équation cartésienne de la forme $ax+by+c=0$ avec $a,b,c\in\mathbb{R}$, $(a,b)\neq(0,0)$
le vecteur $(-b,a)$ est alors un vecteur directeur de la droite, le vecteur (a,b) en est un vecteur normal.

On cherche donc a,b,c réels tels que $\begin{cases}(a,b)\neq(0,0)\\ a.0+b.\sqrt{3}+c=0 & \text{(le point } (0,\sqrt{3}) \text{ est sur la droite)}\\ (-b,a) \text{ est colinéaire à } (1,2) & \text{(la droite est parallèle à celle d'équation } 2x-y+3=0)\end{cases}$

La deuxième condition se traduit par $\exists\lambda\in\mathbb{R}$, $(-b,a)=\lambda(1,2)$ (car $(1,2)$ n'est pas le vecteur nul)
$=(\lambda,2\lambda)$

La première condition devient $-\lambda\sqrt{3}+c=0$
on peut choisir λ quelconque vérifiant $(a,b)=(2\lambda,-\lambda)\neq(0,0)$, c'est à dire $\lambda\neq0$, par exemple $\lambda=1$
on obtient $a=2$, $b=-1$, $c=\sqrt{3}$ d'où l'équation $2x-y+\sqrt{3}=0$

Pour une équation de la droite passant par $(0,\sqrt{3})$ et orthogonale à la droite d'éq. $2x-y+3=0$ on cherche $a,b,c\in\mathbb{R}$ vérifiant
$$\begin{cases}(a,b)\neq(0,0)\\ (-b,a) \text{ est colinéaire à } (2,-1)\\ a.0+b\sqrt{3}+c=0\end{cases}$$

On peut prendre $(-b,a)=(2,-1)$ et alors $c=2\sqrt{3}$ d'où l'équation $-x-2y+2\sqrt{3}=0$

2a. Les points A,B,C sont non alignés ssi les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont non colinéaires
$\vec{AB}=(3,1)-(1,2)=(2,-1)$ est de coordonnées $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$
$\vec{AC}=(-3,-2)-(1,2)=(-4,-4)$ —— $\begin{pmatrix}-4\\-4\end{pmatrix}$ ——
Une condition nécessaire et suffisante pour que $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ soient non colinéaires est que le déterminant $\begin{vmatrix}2 & -4\\-1 & -4\end{vmatrix}$ soit non nul
Or $\begin{vmatrix}2 & -4\\-1 & -4\end{vmatrix}=-8-4=-12\neq0$

On a $A\neq B$ et $C\neq D$ donc les droites (AB) et (CD) sont bien définies. $\vec{AB}=(2,-1)$ est un vecteur directeur de la droite (AB)
$\vec{CD}=(3,1)$ est un vecteur directeur de (CD). Les droites (AB) et (CD) sont parallèles ssi les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires.
Puisque $\vec{CD}\neq0$, $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R},\ \vec{AB}=\lambda\vec{CD}$
$\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}\quad 2=\lambda.3$ et $-1=\lambda.1$
$\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R},\quad \lambda=\frac{2}{3}$ et $\lambda=-1$ impossible

Donc (AB) n'est pas parallèle à (CD)

2b. La droite (AB) admet une équation cartésienne de la forme $ax+by+c=0$ avec $(a,b)\neq(0,0)$
$A\in(AB)$ se traduit par $a+2b+c=0$
$B\in(AB)$ se traduit par $3a+b+c=0$
Ces deux équations sont équivalentes au système $\begin{cases}-2a+b=0 & \text{(on soustrait la seconde équation à la première)}\\ 3a+b+c=0\end{cases}$

(2b) On peut alors choisir $a = 1$ et alors $b = 2$ et $c = -5$. $x + 2y - 5 = 0$ est une equation cartésienne de la droite (AB).

Pour trouver le point d'intersection des droites (AB) et (CD) on peut déterminer une equation cartésienne de la droite (CD) puis résoudre le système formé des équations des deux droites.

On peut aussi procéder comme suit : On cherche un point $M \in \mathbb{R}^2$ tel que $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \vec{AM} = \lambda \vec{AB}$ $(M \in (AB))$

et $\exists \mu \in \mathbb{R}, \vec{CM} = \mu \vec{CD}$ $(M \in (CD))$

Comme $\vec{AC} = \vec{AM} - \vec{CM}$ on doit avoir $\vec{AC} = \lambda \vec{AB} - \mu \vec{CD}$. Inversement si (λ, μ) est un couple de réel vérifiant $\vec{AC} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{CD}$ alors en posant $M = A + \lambda \vec{AB}$ on aura bien $\vec{AM} = \lambda \vec{AB}$ et $\vec{CM} = \mu \vec{CD}$

On calcule $\vec{AC} = (-3,-2) - (1,2) = (-4,-4)$, $\vec{AB} = (2,-1)$, $\vec{CD} = (3,1)$

On cherche donc tous les couples (λ, μ) vérifiant $\begin{cases} -4 = 2\lambda - 3\mu \\ -4 = -\lambda - \mu \end{cases}$ ce qui équivaut à $\begin{cases} -12 = -5\mu \\ 4 = \lambda + \mu \end{cases}$ soit $\mu = \frac{12}{5}$, $\lambda = \frac{8}{5}$

On obtient $M = A + \lambda \vec{AB} = (1,2) + \frac{8}{5}(2,-1) = \left(\frac{21}{5}, \frac{2}{5}\right)$ point d'intersection de (AB) avec (CD)

3. Appelons A le point $(3,1)$ et D la droite d'équation $x - 3y - 3 = 0$. Soit P le projeté orthogonal de A sur D. On a $d(A,D) = AP$. En effet pour $M \in D$ on a $AM^2 = AP^2 + PM^2$ donc $AM^2 \geq AP^2$ donc $AM \geq AP$ avec égalité si $M = P$.

On calcule la position de P : Le vecteur $\vec{n} = (1,-3)$ est un vecteur normal à D donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ $\vec{AP} = \lambda \vec{n}$ soit $P = A + \lambda \vec{n} = (3+\lambda, 1-3\lambda)$

On détermine λ en traduisant $P \in D$ soit $3 + \lambda - 3(1-3\lambda) - 3 = 0$ soit $10\lambda - 3 = 0$, $\lambda = \frac{3}{10}$

Maintenant $AP = \|\lambda \vec{n}\| = \frac{3}{10}\sqrt{1+9} = \frac{3}{\sqrt{10}}$

4. D_1 droite d'équation $x - y + 2 = 0$, $D_2 : 2x + 3y + 1 = 0$, $\Delta_m : (2m+1)x + (3m-1)y + m + 2 = 0$

a. Les droites D_1 et D_2 sont non parallèles car les vecteurs directeurs $(1,1)$ et $(-3,2)$ sont non colinéaires. Donc D_1 et D_2 s'intersectent en exactement 1 point (car on est dans $\mathbb{R}^2$). On note M_0 le point d'intersection (on pourrait calculer les coordonnées du point M_0 en résolvant le système d'équations)

On observe que l'équation de Δ_m est égale à l'équation de D_1 + m fois l'équation de D_2. Donc tout point (x,y) satisfaisant les équations de D_1 et de D_2 satisfait aussi l'équation de Δ_m. Donc M_0 est sur Δ_m.

b. Soit $A = (a,b)$. $A \in \Delta_m \Leftrightarrow (2m+1)a + (3m-1)b + m + 2 = 0 \Leftrightarrow (2a+3b+1)m + a - b + 2 = 0$

Si $2a + 3b + 1 \neq 0$, c'est à dire si $A \notin D_2$, alors il existe un unique m solution $m = \dfrac{b-a-2}{2a+3b+1}$ et $A \in \Delta_m$

Si $2a + 3b + 1 = 0$, c'est à dire si $A \in D_2$, et si $a - b + 2 \neq 0$ (c'est à dire si $A \notin D_1$) alors il n'y a pas de solution. $\forall m$ $A \notin \Delta_m$

Si $2a + 3b + 1 = 0$ et $a - b + 2 = 0$, c'est à dire si $A \in D_1 \cap D_2$, c'est à dire si $A = M_0$ alors tout réel m est solution et on le savait déjà par la question a : $M_0 \in \Delta_m$ pour tout M

5. $D_1 : x\sqrt{3} - y + 1 = 0$, $D_2 : x + y\sqrt{3} - 2 = 0$ D_1 n'est pas parallèle à D_2 car les vecteurs directeurs $(1, \sqrt{3})$ et $(-\sqrt{3}, 1)$ sont non colinéaires.

Soit M_0 le point d'intersection. On détermine M_0 en résolvant le système $\begin{cases} x\sqrt{3} - y + 1 = 0 \\ x + y\sqrt{3} - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\sqrt{3} - y + 1 = 0 \\ 4x + \sqrt{3} - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$ et $y = \frac{2\sqrt{3}+1}{4}$

Mais on n'en aura pas besoin

(5.) Le point $A = (\sqrt{2}, 1)$ n'appartient pas à D_2. D'après 4 la droite $(A\Pi_0)$ (bien définie car $A \neq \Pi_0$) admet une équation de la forme $x\sqrt{3} - y + 1 + m(x + y\sqrt{3} - 2) = 0$ pour un $m \in \mathbb{R}$. On trouve m en traduisant $A \in (A\Pi_0)$:

$$\sqrt{2}\sqrt{3} - 1 + 1 + m(\sqrt{2}+\sqrt{3}-2) = 0 \quad \text{soit } m = \frac{\sqrt6}{\sqrt2+\sqrt3-2} = \frac{\sqrt6(\sqrt2+\sqrt3+2)}{2+3+2\sqrt6-4} = \frac{\sqrt6(\sqrt2+\sqrt3+2)(1-2\sqrt6)}{1-4.6} = \frac{12(\sqrt2+\sqrt3+2)-2\sqrt3-3\sqrt2-2\sqrt6}{23}$$
$$= \frac{24+9\sqrt2+10\sqrt3-2\sqrt6}{23}$$

$(A\Pi_0)$ admet pour équation $(\sqrt3 + m)x + (m\sqrt3 - 1)y + 1 - 2m = 0$. (On n'a pas utilisé les coordonnées de Π_0 calculées précédemment.)

La droite passant par Π_0 et parallèle à la droite d'équation $2x+y=0$ admet également une équation de la forme $x\sqrt3 - y + 1 + m(x+y\sqrt3-2)=0$ car elle est non confondue avec D_2 car les vecteurs directeurs $(-\sqrt3, 1)$ et $(-1,2)$ sont non colinéaires.
On détermine m en écrivant que les vecteurs $(-1,2)$ et $(1-m\sqrt3, m+\sqrt3)$ sont colinéaires : le déterminant $\begin{vmatrix} -1 & 1-m\sqrt3 \\ 2 & m+\sqrt3\end{vmatrix} = -m-\sqrt3+2m\sqrt3-2$ est nul d'où $m = \frac{2+\sqrt3}{2\sqrt3-1} = \frac{5\sqrt3+8}{11}$

6. Ds $\mathbb{R}^2$ $(O,u,v) = ((1,-2),(1,2),(1,3))$ repère cartésien ~~de~~ puisque les vecteurs $(1,2)$ et $(1,3)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$
Soit $\binom{x}{y}$ les coordonnées du point $A:(-1,-1)$ dans le repère (O,u,v). On a donc $\vec{OA} = xu + yv$ soit $(-2,1) = x(1,2)+y(1,3)$

$\begin{cases} x+y=-2 \\ 2x+3y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-2 \\ y=5\end{cases} \Leftrightarrow x=-7$ et $y=5$

Plus généralement soit $\binom{x'}{y'}$ les coordonnées dans le repère (O,u,v) de l'élément $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On a $\begin{cases} x-1 = x'+y' \\ y+2 = 2x'+3y'\end{cases}$

(Le système est de Cramer ($\begin{vmatrix}1&1\\2&3\end{vmatrix} = 3-2 \neq 0$) donc ~~[illegible]~~ (x',y') est uniquement déterminé par (x,y).)

Soit $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 2x+3y+4=0\}$. $(x,y)\in D \Leftrightarrow 2(x'+y'+1)+3(2x'+3y'-2)+4=0$
D'où ~~une~~ l'équation de D dans le repère (O,u,v) : $8x'+11y'=0$

7. Les points $A:(1,2,-1)$, $B=(1,3,4)$, $C=(2,2,2)$ et $D=(0,2,-4)$ de $\mathbb{R}^3$ sont coplanaires $\Leftrightarrow$ la famille $(\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD})$ est liée
$\Leftrightarrow$ le déterminant $\begin{vmatrix} 0&1&-1\\1&0&0\\5&3&-3\end{vmatrix}$ est nul

Or la troisième colonne est l'opposée de la seconde donc le déterminant est nul
(Plus simplement on a $\vec{AD} = -\vec{AC}$ donc la famille $(\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD})$ est liée.)
Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont non colinéaires donc forment une base de la direction du plan engendré par A, B, C. On cherche un vecteur normal à ce plan.
On peut prendre le produit vectoriel $\vec{AB}\wedge\vec{AC} \neq 0$. On a $\vec{AB}\wedge\vec{AC} = \left(\begin{vmatrix}1&0\\5&3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}5&3\\0&1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}\right) = (3,5,-1)$ qu'on note $\vec{n}$.
Soit Π le point $(1,2,3)$ et P son projeté orthogonal sur le plan (ABC). On a $d(\Pi,(ABC)) = \Pi P$ (cf ex 3).
Comme $\vec{\Pi P}$ est colinéaire à $\vec n$ on a $|\vec{\Pi P}\cdot\vec n| = \|\vec{\Pi P}\|\cdot\|\vec n\|$
Comme ~~PA~~ $\vec{PA}$ est orthogonal à $\vec n$ on a $\vec{\Pi P}\cdot\vec n = (\vec{\Pi P}+\vec{PA})\cdot\vec n = \vec{\Pi A}\cdot\vec n$
On calcule $\vec{\Pi A} = (0,0,-4)$, $\vec{\Pi A}\cdot\vec n = 4$, $\|\vec n\|^2 = 3^2+5^2+1^2 = 35$ d'où $d(\Pi,(ABC)) = \|\vec{\Pi P}\| = \frac{4}{\sqrt{35}}$

8. Soit D la droite de $\mathbb{R}^3$ d'équation $\begin{cases} x+y+2z+2=0 \\ x-y+3z+3=0 \end{cases}$. Le système équivaut à $\begin{cases} x+y+2z+2=0 \\ 2x+5z+5=0 \end{cases}$. Pour exhiber une solution

on choisit $z \in \mathbb{R}$ alors $x = \frac{-5z-5}{2}$ puis $y = -x-2z-2 = \frac{z+1}{2}$

On prend $z=0 \rightsquigarrow \left(-\frac{5}{2}, +\frac{1}{2}, 0\right) \in D$

$z=1 \rightsquigarrow (-5, 1, 1) \in D$

9a. On cherche M, N vérifiant $\begin{cases} 2\vec{MA} + \vec{NB} + 5\vec{AB} = 0 \\ \vec{MA} + \vec{MN} + 2(2k^2-1)\vec{AB} = 0 \end{cases}$

On écrit $\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AB} - \vec{NB}$. La deuxième équation devient $2\vec{MA} - \vec{NB} + (4k^2-1)\vec{AB} = 0$

En ajoutant la 1ère équation à la seconde on obtient $4\vec{MA} + (4k^2+4)\vec{AB} = 0$ soit $M = A + (k^2+1)\vec{AB}$

En reportant dans la 1ère éq. on obtient $\vec{NB} = +(2k^2+3)\vec{AB}$ soit $N = B - (2k^2+3)\vec{AB}$.

D'où l'existence et l'unicité de M et N

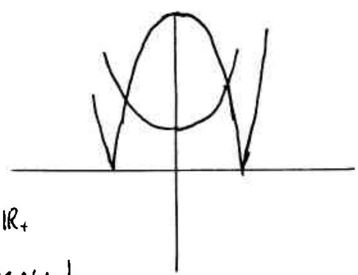
9b (On suppose $A \neq B$
Lorsque k décrit $\mathbb{R}_+$, k^2+1 décrit l'intervalle $[1, +\infty[$, $A + (k^2+1)\vec{AB}$ décrit la demi droite issue de $A + \vec{AB} = B$ contenant le point $A + 2\vec{AB}$

(c'est à dire la demi droite incluse dans (AB) issue de B et ne contenant pas A)

$2k^2+3$ décrit l'intervalle $[3, +\infty[$, $B - (2k^2+3)\vec{AB}$ décrit la demi droite issue de $B + 3\vec{AB}$ passant par B. (et par A)

9c On a $\|\vec{AM}\| = \|(k^2+1)\vec{AB}\| = (k^2+1)AB$

$\|\vec{AN}\| = \|\vec{AB} - \vec{NB}\| = \|(4-2k^2)\vec{AB}\| = |(4-2k^2)|AB$



On "voit" que l'égalité $AM = AN$ se réalise pour deux valeurs de $k \in \mathbb{R}_+$

On a $AM = AN \Leftrightarrow$ (A est le milieu de $[M,N]$ ou $M = N$) car A, M, N sont alignés sur la droite (AB)

Pour départager les conditions de droite on revient aux vecteurs : $M = N \Leftrightarrow \vec{MA} = -(k^2+1)\vec{AB} = -2(2k^2-1)\vec{AB}$

$\Leftrightarrow k^2+1 = 4k^2-2$ (sous l'hypothèse $A \neq B$)

$\Leftrightarrow k = \pm 1$

A milieu de $[M,N] \Leftrightarrow M \neq N$ et $AM = AN$

$\Leftrightarrow k^2 \neq 1$ et $k^2+1 = |4-2k^2|$

Pour $k^2 \in [0,2]$ on a $|4-2k^2| = k^2+1 \Leftrightarrow 4-2k^2 = k^2+1 \Leftrightarrow 3 = 3k^2 \Leftrightarrow k^2 = 1$

Pour $k^2 \in [2, +\infty[$ on a $|4-2k^2| = k^2+1 \Leftrightarrow 2k^2-4 = k^2+1 \Leftrightarrow k^2 = 5$

Conclusion A milieu de $[M,N] \Leftrightarrow k^2 = 5 \Leftrightarrow k = \pm\sqrt{5}$