Licence L3 - option de géométrie

Corrigé de l'examen partiel du 24 novembre 2004

Questions de cours

2) Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications affines entre espaces affines, de partie linéaire φ et ψ respectivement.

On a $\forall\, M, N \in X \quad \overrightarrow{f(M)f(N)} = \varphi(\overrightarrow{MN})$ et $\forall\, M, N \in Y, \ \overrightarrow{g(M)g(N)} = \psi(\overrightarrow{MN})$

Alors pour tous $M, N \in X \quad \overrightarrow{gf(M)\,gf(N)} = \psi(\overrightarrow{f(M)f(N)}) = \psi(\varphi(\overrightarrow{MN}))$

Or $\psi \circ \varphi$ est une application linéaire $\vec{X} \to \vec{Z}$ puisque φ et ψ sont linéaires, donc $g \circ f$ est affine

Exercices

3) a. X plan affine, $f\, X \to X$ homothétie de centre A de rapport $a \neq 1$ Pour tout point M on a $f(M) = A + a\,\overrightarrow{AM}$

Puisque $a \neq 1$, $f(M) \neq M$ dès que $M \neq A$ donc la droite $(Mf(M))$ est bien définie dès que $M \neq A$

Puisque $\overrightarrow{Mf(M)} = (a-1)\,\overrightarrow{AM}$ les droites $(Mf(M))$ et (AM) sont parallèles. Comme elles ont le point M en commun elles sont confondues

Soit M' un autre point du plan distinct de A, alors soit $M' \in (AM)$ et alors les droites $(AM) = (Mf(M))$ et $(AM') = (M'f(M'))$ sont confondues

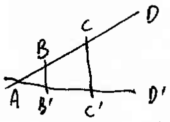
soit $M' \notin (AM)$ et alors A est l'unique point commun de $(AM) = (Mf(M))$ et $(AM') = (M'f(M'))$

Soient maintenant M, N, P trois points non alignés de X. Alors l'un au moins de ces points, disons M, est distinct de A et l'un au moins des points restant, disons N, est hors de la droite (AM), en particulier est aussi distinct de A. On vient de voir que les droites $(Mf(M))$ et $(Nf(N))$ sont alors bien définies et ont pour intersection $\{A\}$

3b) On suppose $M \neq f(M)$ c'est à dire $M \neq A$, et $N \notin (Mf(M)) = (AM)$, ~~en~~ (en particulier $\begin{smallmatrix} N \neq M \\ N \neq A \end{smallmatrix}$). Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont alors non colinéaires donc $M \notin (AN)$ donc (MN) et (AN) sont sécantes en N (c'est à dire non ~~confondues~~ parallèles), donc toute parallèle à (MN) est sécante à (AN)

On a vu en 3a que $f(M) \in (AM)$ et $f(N) \in (AN)$. D'autre part $\overrightarrow{f(M)f(N)} = a\,\overrightarrow{MN}$ est colinéaire à $\overrightarrow{MN}$ donc $f(N)$ est sur la droite passant par $f(M)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{MN}$, c'est à dire sur la droite passant par $f(M)$ et parallèle à (MN). Donc $f(N)$ est le point d'intersection de la droite passant par $f(M)$ parallèle à (MN) avec la droite (AN).

3c)



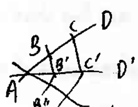
Puisque $B \neq A$ le rapport $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ est bien défini et on a par définition $\overrightarrow{AC} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\,\overrightarrow{AB}$ c'est à dire $C = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\,\overrightarrow{AB} + A$

donc C est l'image de B par l'homothétie f de centre A et de rapport $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$. Inversement si C est l'image de B par une homothétie de centre A de rapport a on doit avoir $C = A + a\,\overrightarrow{AB}$ c'est à dire $\overrightarrow{AC} = a\,\overrightarrow{AB}$ donc $a = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$

D'après 3b), puisque $B' \notin (AB) = (BC)$, $f(B')$ est l'intersection de (AB') avec la parallèle à (BB') passant par $C = f(B)$. Or cette parallèle est justement (CC') et $(CC') \cap (AB') = \{C'\}$ donc $f(B') = C'$. Avec ce qui précède f doit être de rapport $\frac{\overline{AC'}}{\overline{AB'}}$ donc $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AB'}}$

Inversement si $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AB'}} = a$ ~~prenons f~~ Soit f l'homothétie de centre A et de rapport a. On a vu que $f(B) = C$ et $f(B') = C'$. Or $\overrightarrow{f(B)f(B')} = a\,\overrightarrow{BB'}$ donc $\overrightarrow{BB'}$ est un vecteur directeur de $(f(B)f(B')) = (CC')$ donc (BB') et (CC') sont parallèles. On a redémontré le théorème de Thalès.

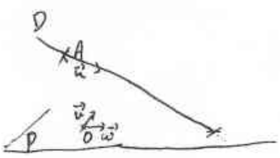
3d)



Soit f l'unique homothétie transformant B en C. D'après 3c) f transforme B' en C'. A nouveau d'après 3c) f transforme B'' en C'' donc $\overrightarrow{f(B)f(B'')} = \overrightarrow{CC''} = a\,\overrightarrow{BB''}$ donc (CC'') est ~~colinéaire~~ parallèle à (BB'').

On aurait pu égal^t observer $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{AC''}}{\overline{AB''}}$ puis appliquer le dernier ~~en~~ résultat de 3c)

4a)



Soit $(O, \vec{v}, \vec{w})$ un repère cartésien de P. La direction $\vec{P}$ est $\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$

Soit D droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$. Sa direction est $\vec{D} = \mathrm{Vect}(\vec{u})$

Si $\vec{u} \in \vec{P}$ alors D est parallèle à P par définition

Si $\vec{u} \notin \vec{P}$ alors $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{\omega}\}$ sont linéairement indépendants, donc forment une base de $\mathbb{R}^3$ puisque $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3.

Il existe donc $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tq $\vec{OA} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \nu\vec{\omega}$ c'est à dire telsque $A - \lambda\vec{u} = O + \mu\vec{v} + \nu\vec{\omega}$

Or $A - \lambda\vec{u} \in D$ et $O + \mu\vec{v} + \nu\vec{\omega} \in P$ donc $A - \lambda\vec{u} \in P \cap D$ et c'est l'unique point de $P \cap D$ puisque l'écriture $\vec{OA} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \nu\vec{\omega}$ est unique.

Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul de la droite vectorielle $\vec{P}^{\perp}$ (un vecteur non nul orthogonal à P)

Puisque $\vec{n} \cdot \vec{n} = \|\vec{n}\|^2 \neq 0$, $\vec{n}$ n'est pas dans $\vec{P}$ donc la droite passant par A de vecteur directeur $\vec{n}$ n'est pas parallèle à P donc elle intersecte P en un point A_p et $\vec{AA_p}$, qui est colinéaire à $\vec{n}$, est bien orthogonal à P. Inversement si $\vec{AA_p}$ est orthogonal à P alors $\vec{AA_p}$ est colinéaire à $\vec{n}$ donc A_p est sur la droite passant par A de vecteur directeur $\vec{n}$, et sur P, ce qui montre son unicité.

On a pour tout $M \in P$, $\|\vec{AM}\|^2 = \|\vec{AA_p}\|^2 + \|\vec{A_pM}\|^2 + 2\,\vec{AA_p} \cdot \vec{A_pM}$ Or $\vec{A_pM} \in \vec{P}$ donc $\vec{AA_p} \cdot \vec{A_pM} = 0$

donc $\|\vec{AM}\| \geq \|\vec{AA_p}\|$ avec égalité si $M = A_p$ donc $\inf\limits_{M \in P} \|\vec{AM}\| = \|\vec{AA_p}\|$

4b) Soit D une droite passant par A parallèle à P. Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de D, on a donc $\vec{u} \in \vec{P}$

Soit M un point de D. On observe $\vec{AM}$ (colinéaire à $\vec{u}$) est dans $\vec{P}$ donc $A_p + \vec{AM}$ est dans P

D'autre part $\vec{M(A_p + \vec{AM})} = \vec{A_pA_p}$ donc est orthogonal à P. Or ces deux propriétés caractérisent M_p

On a donc $M_p = A_p + \vec{AM} = M + \vec{AA_p}$ c'est à dire M_p est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{AA_p}$. Or l'image ~~de~~ par d'une droite par une translation est une droite qui lui est parallèle. Donc l'ensemble des pts M_p lorsque M décrit D est la droite passant par A_p de vecteur directeur $\vec{u}$. Elle est bien sûr incluse dans P par définition de M_p

D'après 4a) $d(M, P) = \|\vec{MM_p}\| \cancel{= \|\vec{AA_p}\|}$ Or $\vec{MM_p} = \vec{AA_p}$ donc $d(M,P)$ ne dépend pas de M. ~~Puisque $A \notin P$, $A \neq A_p$ donc $d($~~

Maintenant $d(D,P) = \inf\limits_{M \in D, N \in P} \|\vec{MN}\| = \inf\limits_{M \in D} \left(\inf\limits_{N \in P} \|\vec{MN}\| \right) = \inf\limits_{M \in D} d(M,P) = \|\vec{AA_p}\| > 0$ puisque $A \notin P$

Pour D passant par A quelconque, soit D est parallèle à P et alors $d(D,P) = \|\vec{AA_p}\| > 0$

soit D intersecte P en un point N et alors $d(D,P) \leq d(N,P) = 0$

4c) (u, v, ω) base de $\mathbb{R}^3$, D droite passant par A de vect. dir. u; D' —— $A + \omega$ —— v. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on pose $M_\lambda = A + \omega + \lambda v$ $M_\lambda \in D'$

Tout plan passant par M_λ et contenant D doit passer par A et avoir u et $\vec{AM_\lambda}$ dans sa direction, et inversement

Or u et $\vec{AM_\lambda} = \omega + \lambda v$ sont non colinéaires donc $\mathrm{Vect}(u, \omega + \lambda v)$ est un s esp vect. de $\mathbb{R}^3$ de dim 2 donc le plan passant par A et de direction $\mathrm{Vect}(u, \omega + \lambda v)$ est l'unique plan passant par M_λ et contenant D

4d) Soit P un plan contenant D, autrement dit un plan passant par A dont la direction contient u. P est déterminé par la donnée d'un vecteur u' de sa direction non colinéaire à u (car alors $P = A + \mathrm{Vect}(u, u')$). On écrit $u' = \alpha u + \beta v + \gamma \omega$ ((u, v, ω) est une base de $\mathbb{R}^3$)

On peut supposer $\alpha = 0$ car $\mathrm{Vect}(u, \alpha u + \beta v + \gamma\omega) = \mathrm{Vect}(u, \beta v + \gamma\omega)$. P est déterminé par la donnée de β et γ non tous deux nuls

On a $\mathrm{Vect}(u, \omega + \lambda v) = \mathrm{Vect}(u, \beta v + \gamma\omega)$ ssi $\omega + \lambda v \in \mathrm{Vect}(u, \beta v + \gamma\omega)$ ce qui équivaut à $\omega + \lambda v$ colinéaire à $\beta v + \gamma\omega$

Pour β, γ fixés, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tq $\omega + \lambda v$ soit colinéaire à $\beta v + \gamma\omega$ ssi $\gamma \neq 0$ (on prend alors $\lambda = \dfrac{\beta}{\gamma}$)

Conclusion $P = P_\lambda$ pour $\lambda = \dfrac{\beta}{\gamma}$ sauf si $P = A + \mathrm{Vect}(u, v)$ qu'on note P_∞. On observe que D', de vecteur directeur v, est parallèle à P_∞ et non incluse dans P_∞ puisque $A + \omega \notin P_\infty$. Donc $d(D', P_\infty) > 0$ d'après 4b)

Or $d(D', D) = \inf\limits_{M' \in D', M \in D} \|\vec{M'M}\| \geq \underbrace{\inf\limits_{M' \in D', M \in P_\infty}}_{\text{car } D \subset P_\infty} \|\vec{M'M}\| = d(D', P_\infty)$ donc $d(D', D) > 0$

4e) D et D'_{P_∞} sont deux droites d'un même plan, elles sont donc sécantes ou parallèles. Or D'_{P_∞} est parallèle à D' (Question b avec des notations différentes) et D' n'est pas parallèle à D puisque u et v sont non colinéaires. Donc D et D'_{P_∞} sont sécantes en un point N_{P_∞}. Comme D'_{P_∞} est l'image de D' par la projection orthogonale sur P_∞, N_{P_∞} est l'image d'un point $N \in D$

On a $NN_{P_\infty} = d(N, P_\infty) = d(D', P_\infty) \leqslant d(D', D)$, les deux égalités venant de la question b, l'inégalité venant de $D \subset P_\infty$

et $d(D', D) \leqslant MM'$ pour tout point M de D et tout pt M' de D', par définition de $d(D, D')$. On obtient donc, puisque $N_{P_\infty} \in D$ et $N \in D'$

$NN_{P_\infty} \leqslant d(D', P_\infty) \leqslant NN_{P_\infty}$ donc $d(D', D) = NN_{P_\infty}$.

4f) Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul orthogonal à u et à v. (Il en existe puisque $\dim(\mathrm{Vect}(u,v)^{\perp}) = 3-2 = 1$)

Pour $M \in D$ et $M' \in D'$ on a $\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{MN_{P_\infty}} \cdot \vec{n} + \overrightarrow{N_{P_\infty}N} \cdot \vec{n} + \overrightarrow{NM'} \cdot \vec{n}$ par bilinéarité du produit scalaire et relation de Chasles

$= \overrightarrow{N_{P_\infty}N} \cdot \vec{n}$ car M et N_{P_∞} sont sur D donc $\overrightarrow{MN_{P_\infty}}$ est colinéaire à u donc est orthogonal à $\vec{n}$ et de même $\overrightarrow{NM'}$ est colinéaire à v donc orthogonal à $\vec{n}$.

Or $\overrightarrow{N_{P_\infty}N}$ est orthogonal à $\vec{P_\infty} = \mathrm{vect}(u,v)$ (Question d), $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{P_\infty}$ et $\vec{P_\infty}^{\perp}$ est de dim 1 donc $\overrightarrow{N_{P_\infty}N}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires donc $|\overrightarrow{N_{P_\infty}N} \cdot \vec{n}| = \|\overrightarrow{N_{P_\infty}N}\| \cdot \|\vec{n}\| = d(D', D) \cdot \|\vec{n}\|$

(Ceci montre à nouveau, au passage, l'égalité $d(D, D') = NN_{P_\infty}$ puisqu'on a $\|\overrightarrow{NN_{P_\infty}}\| \cdot \|\vec{n}\| = |\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{n}| \leqslant \|\overrightarrow{MM'}\| \cdot \|\vec{n}\|$ et $\|\vec{n}\| \neq 0$ donc $\forall M \in D, \forall M' \in D'$ $NN_{P_\infty} \leqslant MM'$)

4g) $u = (1,0,1)$, $v = (1,2,1)$ On peut prendre pour $\vec{n}$ le produit vectoriel $u \wedge v = (-2,0,2)$

On prend $M = A = (0,0,0) \in D$, $M' = A + \omega = (1,2,3) \in D'$

On calcule $\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{MM'} \cdot \vec{n} = (1,2,3) \cdot (-2,0,2) = -2+0+6 = 4 \\ \vec{n} \cdot \vec{n} = (-2)^2 + 2^2 = 8 \end{array}\right\}$ donc $d(D, D') = \frac{4}{\sqrt{8}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$