L3 géométrie – Corrigé des questions 1 à 4 de l'examen partiel du 7 novembre 2005

1. Soit X un espace affine de dimension finie n. Un repère cartésien de X est une famille $(O, e_1, \dots, e_n)$ où O est un point de X et $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de la direction de X

2. Soit $f : X \to Y$ une application affine entre espaces affines, de partie linéaire φ. Supposons X non vide et soit $A \in X$.

On a $X = \{A + \vec{u},\ \vec{u} \in \vec{X}\}$ puisque $X \to \vec{X},\ M \mapsto \vec{AM}$ est une bijection et puisque $M = A + \vec{AM}$ pour tout $M \in X$

D'autre part ~~f(X)~~ pour tout $\vec{u} \in \vec{X}$, $f(A+\vec{u}) = f(A) + \varphi(\vec{u})$

Donc $f(X) = \{f(A+\vec{u}), \vec{u} \in \vec{X}\} = \{f(A) + \varphi(\vec{u}), \vec{u} \in \vec{X}\} = f(A) + \varphi(\vec{X})$

Or $\cancel{f(A)}+\varphi(\vec{X})$ est l'image de l'application linéaire $\varphi : \vec{X} \to \vec{Y}$, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\vec{Y}$.

$f(A) + \varphi(\vec{X})$ est le sous espace affine de Y passant par $f(A)$ et de direction $\varphi(\vec{X})$

3. $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $(a,b) \neq (0,0)$. Soit $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ ax+by+c=0\}$. F est non vide : si $a \neq 0$ alors $(-\frac{c}{a}, 0) \in F$. Si $a = 0$ alors $b \neq 0$ et $(0, -\frac{c}{b}) \in F$

Soit (x_0, y_0) un élément de F. On a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\quad (x,y) \in F \Leftrightarrow ax+by = -c = -ax_0 - by_0$

$\Leftrightarrow a(x-x_0) + b(y-y_0) = 0$

Soit φ l'application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto ax+by$ ~~φ est la~~ On vérifie facilement que φ est linéaire. φ ~~est non~~ n'est pas l'application constante égale à 0 car $\varphi((1,0))$ ou $\varphi((0,1))$ est non nul. Donc $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, non réduit à $\{0\}$ par le thm du rang ($\dim \mathrm{Ker}\,\varphi = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \mathrm{Im}\,\varphi \geq 1$ car $\dim \mathrm{Im}\,\varphi \leq \dim \mathbb{R} = 1$) et non égal à $\mathbb{R}^2$ car φ n'est pas l'application nulle. $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est donc un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1.

On a $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \varphi((x,y) - (x_0,y_0)) = 0\} = \{(x_0,y_0) + (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ \varphi((\alpha,\beta)) = 0\} = (x_0,y_0) + \mathrm{Ker}\,\varphi$. Or ce dernier ensemble est le sous espace affine de $\mathbb{R}^2$ passant par (x_0,y_0) et de direction $\mathrm{Ker}\,\varphi$.

4a. $P_0 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ 2x+y-t = 1 \text{ et } x+y-2z+t = 2\}$

Le système $\begin{cases} 2x+y-t=1 \\ x+y-2z+t=2 \end{cases}$ est équivalent à $\begin{cases} t = 2x+y-1 \\ z = \frac{1}{2}(x+y+t-2) \end{cases}$ Prenons $x=y=0$, on obtient $t=-1$ puis $z = -\frac{3}{2}$. Donc $(0,0,-\frac{3}{2},-1) \in P_0$

Ecrivons $(x,y,z,t) = (0,0,-\frac{3}{2},-1) + (\alpha,\beta,\gamma,\delta)$; on a $(x,y,z,t) \in P_0 \Leftrightarrow 2\alpha+\beta-\delta = 0$ et $\alpha+\beta-2\gamma+\delta = 0$

$\Leftrightarrow \delta = 2\alpha+\beta$ et $\gamma = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+2\alpha+\beta) = \frac{1}{2}(3\alpha+2\beta)$

$\Leftrightarrow (\alpha,\beta,\gamma,\delta) = (\alpha, \beta, \frac{3}{2}\alpha+\beta, 2\alpha+\beta) = \alpha(1,0,\frac{3}{2},2) + \beta(0,1,1,1)$

Donc $P_0 = (0,0,-\frac{3}{2},-1) + \mathrm{Vect}((1,0,\frac{3}{2},2), (0,1,1,1))$. C'est donc un sous-espace affine de direction $\mathrm{Vect}((1,0,\frac{3}{2},2),(0,1,1,1))$

Les vecteurs $(1,0,\frac{3}{2},2)$ et $(0,1,1,1)$ sont non proportionnels donc le sous-espace vectoriel engendré par ces deux vecteurs est de dimension 2.

b. P_1 sous-espace affine engendré par $A_1 = (0,2,\frac{1}{2},0)$, $A_2 = (1,0,0,0)$, $A_3 = (1,1,1,1)$ et $A_4 = (-1,2,-1,-2)$. Il est non vide puisqu'il contient A_1

La direction de P_1 est le sous-espace vectoriel engendré par $\vec{A_1A_2} = (1,-2,-\frac{1}{2},0)$, $\vec{A_1A_3} = (1,-1,\frac{1}{2},1)$ et $\vec{A_1A_4} = (-1,0,-\frac{3}{2},-2)$

On a $\vec{A_1A_4} = \vec{A_1A_2} - 2\vec{A_1A_3}$ donc $\mathrm{Vect}(\vec{A_1A_2}, \vec{A_1A_3}, \vec{A_1A_4}) = \mathrm{Vect}(\vec{A_1A_2}, \vec{A_1A_3})$

$\vec{A_1A_2}$ et $\vec{A_1A_3}$ sont manifestement non proportionnels donc $\mathrm{Vect}(\vec{A_1A_2}, \vec{A_1A_3})$ est de dimension 2

Maintenant $P_1 \parallel P_0 \Leftrightarrow \mathrm{Vect}(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}) = \mathrm{Vect}((1,0,\frac{3}{2},2),(0,1,1,1))$

On sait déjà que les deux sous-espaces vectoriels ont même dimension. On a $(1,0,\frac{3}{2},2) = -\overrightarrow{A_1A_4}$ et $(0,1,1,1) = \overrightarrow{A_2A_3} = \overrightarrow{A_1A_3} - \overrightarrow{A_1A_2}$ donc le second est inclus dans le premier donc ils sont égaux.

c. P_2 plan passant par $(1,0,0,1)$ et parallèle à P_1. P_2 et P_1 ont donc même direction donc P_2 et P_0 ont même direction. On a alors $P_2 = P_0 \Leftrightarrow P_2$ et P_0 ont un point commun. Or le point $(1,0,0,1)$ appartient à P_0 car il vérifie les deux équations.

d. Soit P un plan non parallèle à P_0. $\vec{P}$ et $\vec{P_0}$ sont donc deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ non confondus, donc $\vec{P} \cap \vec{P_0}$ est un sev de dim 0 ou 1.

Si $\dim(\vec{P} \cap \vec{P_0}) = 0$ alors $\dim(\vec{P} + \vec{P_0}) = \dim \mathbb{R}^4$ donc $\mathbb{R}^4 = \vec{P} \oplus \vec{P_0}$. Par un théorème du cours $P \cap P_0$ est alors un point.

Si $\dim(\vec{P} \cap \vec{P_0}) = 1$ alors $\dim(\vec{P} + \vec{P_0}) = 3$ donc $\vec{P} + \vec{P_0}$ est strictement inclus dans $\mathbb{R}^4$. Notons $A = (1,0,0,1)$, c'est un point de P_0, et soit B un point de P. Alors $P \cap P_0 \neq \emptyset \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \in \vec{P} + \vec{P_0}$ par le même théorème du cours. Si ces condition sont satisfaites $P \cap P_0$ est un sous espace affine de direction $\vec{P} \cap \vec{P_0}$, donc une droite. On résume la situation lorsque $\dim(\vec{P} \cap \vec{P_0}) = 1$ comme suit.

Formons $A + (\vec{P} + \vec{P_0})$ le sous-espace affine passant par A et de direction $\vec{P} + \vec{P_0}$. Il est de dim 3 donc diffère de $\mathbb{R}^4$. Tout plan passant par un point de $A + (\vec{P} + \vec{P_0})$ et de direction $\vec{P}$ intersecte P_0 suivant une droite. Tout plan passant par un point de $\mathbb{R}^4 \setminus (A + \vec{P} + \vec{P_0})$ et de direction $\vec{P}$ est disjoint de P_0.