Corrigé de l'exercice 5 du partiel du 07/11/05

(droites et barycentres)

D_1 et D_2 sont deux droites d'un plan affine $\mathcal{P}$ (défini sur $\mathbb{R}$ pour fixé les idées).
Dans les questions **a)** et **b)** on suppose que D_1 est parallèle à D_2.
Dans les questions **c)**, **d)**, **e)** et **f)** on suppose D_1 et D_2 sécantes en O.

a) Etant donnés α et β deux réels vérifiant $\alpha+\beta=1$, on va montrer que l'ensemble $\boldsymbol{D_{\alpha,\beta} = \{M \in \mathcal{P} \,/\, \exists A \in D_1, \exists B \in D_2, M = \mathrm{Bar}((A,\alpha),(B,\beta))\}}$ est une droite parallèle à D_1.

- Observons pour commencer, que **$D_{\alpha,\beta}$ n'est pas vide**.
  Pour A un point quelconque sur D_1 et B un point quelconque sur D_2, il existe un unique point $M \in \mathcal{P}$ tel que $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = 0$. La relation $\alpha+\beta=1$ nous donne $M = A + \beta\overrightarrow{AB}$.

- L'observation ci-dessus nous permet de dire que **$D_{\alpha,\beta}$ n'est autre que l'ensemble des barycentres $\mathrm{Bar}((A,\alpha),(B,\beta))$ pour A et B parcourant respectivement D_1 et D_2.** Fixons une origine A_0 dans D_1 et une origine B_0 dans D_2. Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de D_1 ($\vec{u}$ est aussi vecteur directeur de D_2, car D_2 est supposée être parallèle à D_1).
  Quels que soient $A \in D_1$ et $B \in D_2$, il existe $x, y \in \mathbb{R}$, tels que $A = A_0 + x\vec{u}$ et $B = B_0 + y\vec{u}$.
  $A = A_0 + x\vec{u}$ et $B = B_0 + y\vec{u}$ étant donnés, en écrivant *(par la relation de Chasles)* $\alpha\overrightarrow{MA} = \alpha\overrightarrow{MA_0} + \alpha\overrightarrow{A_0A}$ et $\beta\overrightarrow{MB} = \beta\overrightarrow{MA_0} + \beta\overrightarrow{A_0B_0} + \beta\overrightarrow{B_0B}$, on voit que l'unique point $M \in \mathcal{P}$ vérifiant $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = 0$ est tel que $\boldsymbol{M = A_0 + \beta\overrightarrow{A_0B_0} + (\alpha x + \beta y)\vec{u}}$.
  Posant $\boldsymbol{M_0 = A_0 + \beta\overrightarrow{A_0B_0}}$, on a $\boldsymbol{M = M_0 + (\alpha x + \beta y)\vec{u}}$. Lorsque A parcourt D_1 et B parcourt D_2, le couple (x, y) parcourt tout $\mathbb{R}^2$ et comme $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, $(\alpha x + \beta y)$ parcourt tout $\mathbb{R}$. Conclusion: $\boldsymbol{D_{\alpha,\beta} = M_0 + \mathbb{R}\vec{u}}$. C'est donc une droite parallèle à D_1.

b) Soit D une droite parallèle à D_1. Notons $\vec{u}$ un vecteur directeur de D_1, D_2 et D. Soit $\vec{w} \in \vec{\mathcal{P}}$ tel que $(\vec{u}, \vec{w})$ est une base de $\vec{\mathcal{P}}$. Pour A un point quelconque de D_1, la droite Δ passant par A et de vecteur directeur $\vec{w}$ coupe D_2 en un point B et la droite D en un point M.
Notons que si $D_1 = D_2$, alors on doit avoir $D = D_1 = D_2$ et on peut prendre $\alpha = 1$, $\beta = 0$ (dans ce cas on peut en fait prendre tout couple (α, β) vérifiant $\alpha + \beta = 1$).
Nous allons donc supposer les droites D_1 et D_2 distinctes. Dans ce cas, les points A et B sont distincts et $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite Δ. **Il existe** alors un unique scalaire $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$ tel que $\boldsymbol{\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}}$, ce qui s'écrit encore $\boldsymbol{(1-\lambda)\overrightarrow{MA} + \lambda\overrightarrow{MB} = 0}$. Posons alors $\alpha = 1-\lambda$ et $\beta = \lambda$. D'après **a)**, $D_{\alpha,\beta}$ est une droite parallèle à D_1. $D_{\alpha,\beta}$ est donc parallèle à D et partage le point M avec D. Conclusion: $D_{\alpha,\beta} = D$.

c) Soient $A \in D_1$, $B \in D_2$ tels que $\overrightarrow{AB} = x_{\overrightarrow{AB}}\vec{v}$. Supposons $x_A \neq 0$ et posons $\mu = \dfrac{x_{\overrightarrow{AB}}}{x_A}$. Soient $A' \in D_1$ tel que $x_{A'} \neq 0$ et $B' \in D_2$ vérifiant $\overrightarrow{A'B'} = x_{\overrightarrow{A'B'}}\vec{v}$. Comme $A \neq O$ **il existe** un unique $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$ tel que $\boldsymbol{\overrightarrow{OA'} = \lambda\overrightarrow{OA}}$, c'est-à-dire $\boldsymbol{x_{A'} = \lambda x_A}$. On a $\lambda \neq 0$ car $A' \neq O$. Ecrivant $\boldsymbol{\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{B'A'}}$ et $\boldsymbol{\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA}}$, la relation $\boldsymbol{\overrightarrow{OA'} - \lambda\overrightarrow{OA} = 0}$ devient

$$\boldsymbol{(\overrightarrow{OB'} - \lambda\overrightarrow{OB}) + (\lambda x_{\overrightarrow{AB}} - x_{\overrightarrow{A'B'}})\vec{v} = 0.}$$

Comme $(\overrightarrow{OB'} - \lambda\overrightarrow{OB}) \in \vec{D}_2$ et $\vec{v} \notin \vec{D}_2$, on en déduit $\boldsymbol{x_{\overrightarrow{A'B'}} = \lambda x_{\overrightarrow{AB}}}$ et $\boldsymbol{\overrightarrow{OB'} = \lambda\overrightarrow{OB}}$. D'où $\boldsymbol{\dfrac{x_{\overrightarrow{A'B'}}}{x_{A'}} = \dfrac{x_{\overrightarrow{AB}}}{x_A} = \mu}$. Si $x_A = 0$, on a $A = O \in D_2$ et l'unique point $B \in D_2$ tel que $\overrightarrow{OB}$ est colinéaire à $\vec{v}$ est O, car $\vec{v} \notin \vec{D}_2$.

d) Soit $\vec{w}$ un vecteur directeur de la droite D_2, $(\vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\vec{\mathcal{P}}$.
Etant donné A un point quelconque de D_1, soit Δ la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{v}$. Δ n'est pas parallèle à D_2. Par conséquent ces deux droites du plan $\mathcal{P}$ se coupent en un seul point $B \in \Delta \cap D_2$ et le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à $\vec{v}$.
Si dans l'écriture unique de $\overrightarrow{OA}$ dans la base $(\vec{v}, \vec{w})$ de $\vec{\mathcal{P}}$ on a $\overrightarrow{OA} = \lambda_1\vec{v} + \lambda_2\vec{w}$, alors $B = O + \lambda_2\vec{w}$.

e) Comme $O \in D_1 \cap D_2$, on constate que $D_{\alpha,\beta,\vec{v}}$ n'est pas vide en écrivant $O = \mathrm{Bar}((O,\alpha),(O,\beta))$.

Remarque préliminaire sur le cas dégénéré où les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires:

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et $\beta \neq 1$, alors $D_{\alpha,\beta,\vec{v}} = D_1$.
  En effet dans ce cas, $D_{\alpha,\beta,\vec{v}} = \left\{ M \in \mathcal{P} / \exists A \in D_1, \overrightarrow{AO}\, colinéaire\ à\ \vec{v}\, et\, M = Bar((A,\alpha),(O,\beta)) \right\}$.
  On a alors $(M \in D_{\alpha,\beta,\vec{v}}) \Leftrightarrow (\exists A \in D_1, M = O + x_A(\alpha\vec{u}))$. α n'étant pas nul, cet ensemble de points M n'est autre que D_1.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et $\beta = 1$, alors $D_{\alpha,\beta,\vec{v}}$ se réduit au point O. Dans ce cas $D_{\alpha,\beta,\vec{v}}$ n'est pas une droite.

Supposons maintenant $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires. Soit $A_0 \in D_1$, $A_0 \neq O$.
D'après **d)**, la droite passant par A_0 et de vecteur directeur $\vec{v}$ coupe la droite D_2 en B_0 (B_0 est distinct de O du fait de la non colinéarité de $\vec{u}$ et $\vec{v}$) .
On a $\boldsymbol{\overrightarrow{OA_0} = x_{A_0}\vec{u}}$ ($x_{A_0} \neq 0$) et $\boldsymbol{\overrightarrow{A_0B_0} = x_{\overrightarrow{A_0B_0}}\vec{v}}$. Posons alors $\boldsymbol{\mu = \dfrac{x_{\overrightarrow{A_0B_0}}}{x_{A_0}}}$.
Cela donne $\boldsymbol{\overrightarrow{A_0B_0} = x_{A_0}\mu\vec{v}}$. Soit M_0 l'unique point du plan vérifiant $\alpha\overrightarrow{M_0A_0} + \beta\overrightarrow{M_0B_0} = 0$.
On a $\overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{OA_0} + \beta\overrightarrow{A_0B_0}$, donc $\boldsymbol{\overrightarrow{OM_0} = x_{A_0}(\vec{u} + \beta\mu\vec{v})}$.
Si $A \in D_1$ ($A \neq O$) et $B \in D_2$ sont deux points tels que $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à $\vec{v}$, alors l'unique point M du plan vérifiant $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = 0$ est tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{AB}$. D'après **c)**, nous savons que $\boldsymbol{\mu = \dfrac{x_{\overrightarrow{A_0B_0}}}{x_{A_0}} = \dfrac{x_{\overrightarrow{AB}}}{x_A}}$, d'où $\boldsymbol{\overrightarrow{OM} = x_A(\vec{u} + \beta\mu\vec{v})}$. Il s'en suit que O, M_0 et M sont alignés,
Donc $D_{\alpha,\beta,\vec{v}}$ est contenu dans la droite (OM_0). Lorsque A parcourt D_1, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ ci-dessus décrit la droite vectorielle engendrée par $\boldsymbol{(\vec{u} + \beta\mu\vec{v})}$ (ce vecteur est non nul car $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires). Conclusion: $D_{\alpha,\beta,\vec{v}}$ est une droite.

f) On note que D_1 a pour vecteur directeur $\boldsymbol{\vec{u} = (-2, 1)}$, D_2 a pour vecteur directeur $\boldsymbol{\vec{w} = (-1, 2)}$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ n'étant pas colinéaires, ces deux droites du plan $\mathbb{R}^2$ sont sécantes en un point O que l'on détermine en résolvant le système linéaire $\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{x + 2y + 3 = 0} \\ \boldsymbol{2x + y + 1 = 0} \end{array} \right.$. On trouve $\boldsymbol{O = (\frac{1}{3}, \frac{-5}{3})}$.
Nous savons d'après **e)** que $D_{\alpha,\beta,\vec{v}}$ est une droite passant par O.

- Si $\alpha = 0$, on a $\beta = 1$ et $D_{\alpha,\beta,\vec{v}} = D_2$. Dans ce cas, tout vecteur $\vec{v}$ non colinéaire au vecteur $\vec{u}$ et non colinéaire à $\vec{w}$ convient (par exemple $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$).

- Si $\alpha = 1$, on a $\beta = 0$ et $D_{\alpha,\beta,\vec{v}} = D_1$. Dans ce cas, tout vecteur $\vec{v}$ non colinéaire à $\vec{w}$ convient (par exemple $\vec{v} = \vec{u}$).

- Si $\boldsymbol{\alpha\beta \neq 0}$, on constate que le vecteur directeur de $D_{\alpha,\beta,\vec{v}}$ est $\boldsymbol{(-2\alpha - \beta, \alpha + 2\beta) = \alpha\vec{u} + \beta\vec{w}}$. Ce vecteur n'est colinéaire ni à $\vec{u}$ ni à $\vec{w}$. En particulier $\vec{v}$ n'est pas colinéaire à $\vec{u}$ (voir la remarque du **e)**).
  En utilisant **e)**, posons $\boldsymbol{\vec{v} = (x_1, y_1)}$ et prenons sur D_1 un point $A_0 = (x_0, y_0)$ distinct de O. La droite passant par A_0 et de vecteur directeur $\vec{v}$ coupe D_2 en B_0.
  Si $\boldsymbol{\overrightarrow{OA_0} = x_{A_0}\vec{u}}$ et $\boldsymbol{\mu = \dfrac{x_{\overrightarrow{A_0B_0}}}{x_{A_0}}}$, nous savons qu'un vecteur directeur de $D_{\alpha,\beta,\vec{v}}$ est $\boldsymbol{(\vec{u} + \beta\mu\vec{v})}$.
  Posons $\boldsymbol{x_{A_0} = 1}$, de sorte que $A_0 = O + (-2, 1)$ ($A_0 = (\frac{-5}{3}, \frac{-2}{3})$). On trouve le point B_0 en résolvant l'équation $\boldsymbol{2(\frac{-5}{3} + t x_1) + (\frac{-2}{3} + t y_1) + 1 = 0}$, où l'inconnue est $\boldsymbol{t}$.
  La non colinéarité de $\vec{v}$ et $\vec{w}$ nous assure que $\boldsymbol{(2x_1 + y_1) \neq 0}$ et on trouve $\boldsymbol{B_0 = A_0 + \dfrac{3}{2x_1 + y_1}\vec{v}}$. On en déduit $\boldsymbol{\mu = \dfrac{3}{2x_1 + y_1}}$. Il ne reste plus qu'à écrire que les vecteurs $(\vec{u} + \beta\mu\vec{v})$ et $(\alpha\vec{u} + \beta\vec{w})$ sont colinéaires: $\boldsymbol{\begin{vmatrix} -2 + \beta\mu x_1 & -2\alpha - \beta \\ 1 + \beta\mu y_1 & \alpha + 2\beta \end{vmatrix} = 0}$.
  Ce qui équivaut à $\boldsymbol{\begin{vmatrix} -2(2x_1 + y_1) + 3\beta x_1 & -2\alpha - \beta \\ 2x_1 + y_1 + 3\beta y_1 & \alpha + 2\beta \end{vmatrix} = 0}$. En développant ce déterminant et en tenant compte de la relation $\alpha + \beta = 1$, on trouve la relation $\boldsymbol{x_1 = y_1}$.

  Conclusion: le vecteur $\boldsymbol{\vec{v} = (1, 1)}$ convient.