Licence L3 - option de géométrie - 2004-05 Corrigé du test 2

1.A Soit X un espace affine. Une translation sur X est une application de la forme $M \mapsto M + \vec{u}$, $X \to X$, où $\vec{u}$ est un vecteur fixé de la direction $\vec{X}$ de X.

Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{X}$, $f : X \to X$, $M \mapsto M + \vec{u}$, $g : X \to X$, $M \mapsto M + \vec{v}$. Alors $g \circ f$ est l'application $X \to X$, $M \mapsto (M + \vec{u}) + \vec{v} = M + (\vec{u} + \vec{v})$ c'est donc la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$. Si $\vec{v} = -\vec{u}$ alors $g \circ f = f \circ g = Id_X$ donc une translation est inversible et l'inverse de la translation de vecteur $\vec{u}$ est la translation de vecteur $-\vec{u}$

1.B Soit X un espace affine euclidien. Une isométrie de X est une application d'ensembles $X \xrightarrow{f} X$ conservant la distance :

$\forall M, N \in X$, $d(f(M), f(N)) = d(M, N)$. Si g est une autre isométrie de X on a
$$d(g\circ f(M), g \circ f(N)) = d(f(M), f(N)) = d(M, N)$$
ceci quelque soit $M, N \in X$ donc $g \circ f$ est une isométrie. Si f est bijective, notons f^{-1} l'application réciproque de f. On a
$$\forall M, N \in X,\ d(f^{-1}(M), f^{-1}(N)) = d(f(f^{-1}(M)), f(f^{-1}(N))) \quad \text{car } f \text{ est une isométrie}$$
$$= d(M, N) \quad \text{car } f \circ f^{-1} = Id$$

donc f^{-1} est une isométrie.
(On sait que tout isométrie est en fait bijective)

2.A L'équation $ax + by + cz + d = 0$ définit un plan de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $(a, b, c) \neq (0,0,0)$

Supposons ceci vérifié et soit D une droite de vecteur directeur $(a', b', c') \in \mathbb{R}^3$. On peut munir $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique et alors (a, b, c) est un vecteur normal au plan. Alors D est parallèle au plan si et seulement si (a, b, c) est orthogonal à D, c'est-à-dire si (a, b, c) est orthogonal à (a', b', c') ; c'est-à-dire si le produit scalaire $(a, b, c) \cdot (a', b', c') = aa' + bb' + cc'$ est nul.
Si la droite n'est pas parallèle au plan alors elle intersecte le plan en exactement un point car $\mathbb{R}^3$ est somme directe de la direction du plan et de la droite

2.B L'équation $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = a$ définit un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$

Deux hyperplans d'équations respectives $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = a$ et $b_1 x_1 + \dots + b_n x_n = b$ sont parallèles si et seulement si les n-uplets $(a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_n)$ (qui sont les coordonnées de vecteurs normaux aux hyperplans pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$) sont proportionnels. Si tel n'est pas le cas alors l'intersection des deux hyperplans est un sous espace affine non vide de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n-2$ (cf par exemple la résolution d'un système d'équations linéaires)