L3 Option géométrie Corrigé de la feuille 2

1. Montrons d'abord que les conditions (ii), (iii) et (iv) sont équivalentes

Soit I le milieu du segment [AD]. On a par définition $\vec{IA}+\vec{ID}=0$

D'autre part $\vec{IB}+\vec{IC} = (\vec{IA}+\vec{AB}) + (\vec{ID}+\vec{DC}) = \vec{AB}-\vec{CD}$

$$= (\vec{ID}+\vec{DB}) + (\vec{IA}+\vec{AC}) = \vec{AC}-\vec{BD}$$

Donc $\vec{AB}=\vec{CD} \iff \vec{IB}+\vec{IC}=0 \iff \vec{AC}=\vec{BD}$ On a bien l'équivalence voulue.

Venons en au point (i). Les droites (AB), (CD), (AC) et (BD) admettent pour vecteur directeur $\vec{AB}$, $\vec{CD}$, $\vec{AC}$ et $\vec{BD}$ respectivement.

On a $(AB)//(CD) \iff \exists \lambda\in\mathbb{R},\ \vec{AB}=\lambda\vec{CD}$

$(AC)//(BD) \iff \exists \mu\in\mathbb{R},\ \vec{AC}=\mu\vec{BD}$

Clairement les conditions (ii) et (iii) impliquent (i). La réciproque est fausse : si les points A,B,C,D sont alignés on a bien (i) mais pas nécessairement (ii)

Supposons les points A,B,C,D non alignés et montrons (i) $\Rightarrow$ (ii) et (iii). On a A,B,C non alignés ou A,B,D non alignés donc $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont non colinéaires ou $\vec{AB}$ et $\vec{BD}$ sont non colinéaires

On suppose donc $\exists \lambda,\mu\in\mathbb{R}$, $\vec{AB}=\lambda\vec{CD}$ et $\vec{AC}=\mu\vec{BD}$ Nécessairement $\lambda\neq 0$ et $\mu\neq 0$ car $A\neq B$ et $A\neq C$

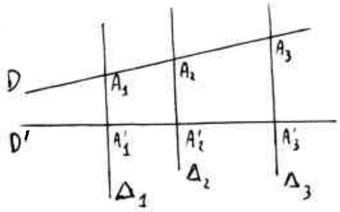
Si $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont non colinéaires on écrit $\vec{AB}=\lambda\vec{CA}+\lambda\vec{AD}$ et $\vec{AC}=\mu\vec{BA}+\mu\vec{AD}$ donc $\vec{AD}=\frac{1}{\lambda}\vec{AB}+\vec{AC}=\frac{1}{\mu}\vec{AC}+\vec{AB}$

donc $\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\vec{AB}=\left(1-\frac{1}{\mu}\right)\vec{AC}$. Or $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont non colinéaires donc $1-\frac{1}{\lambda}=0$ et $1-\frac{1}{\mu}=0$ c'est à dire $\lambda=\mu=1$, ce qu'on voulait montrer.

Si $\vec{AB}$ et $\vec{BD}$ sont non colinéaires on écrit plutôt $\vec{AB}=\lambda\vec{CB}+\lambda\vec{BD}$ et $\vec{AB}+\vec{BC}=\mu\vec{BD}$ donc $\vec{BC}=\vec{BD}-\frac{1}{\lambda}\vec{AB}=\mu\vec{BD}-\vec{AB}$

et on conclut comme précédemment $\lambda=\mu=1$

2.



Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de Δ_1. On suppose $\Delta_1 // \Delta_2 // \Delta_3$ donc $\vec{u}$ est aussi vecteur directeur de Δ_2 et de Δ_3

On suppose Δ_1 et Δ_3 non confondues, alors $\Delta_1\cap\Delta_3=\emptyset$ donc $A_1\neq A_3$ donc $\vec{A_1A_3}$ est un vecteur directeur de D. De même $\vec{A'_1A'_3}$ est un vecteur directeur de D'

On suppose Δ_1 sécante à D donc non parallèle à D donc $\vec{A_1A_3}$ et $\vec{u}$ sont non colinéaires.

On a $\vec{A_1A_2} = \dfrac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1A_3}}\,\vec{A_1A_3}$ par définition de la mesure algébrique sur D. De même $\vec{A'_1A'_2} = \dfrac{\overline{A'_1A'_2}}{\overline{A'_1A'_3}}\,\vec{A'_1A'_3}$ On veut montrer $\dfrac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1A_3}} = \dfrac{\overline{A'_1A'_2}}{\overline{A'_1A'_3}}$

On écrit $\vec{A'_1A'_2} = \vec{A'_1A_1}+\vec{A_1A_2}+\vec{A_2A'_2} = \vec{A_1A_2}+\alpha\vec{u}$ pour un certain réel α car $\vec{A'_1A_1}$ et $\vec{A_2A'_2}$ sont colinéaires à $\vec{u}$

On écrit aussi $\vec{A'_1A'_3} = \vec{A'_1A_1}+\vec{A_1A_3}+\vec{A_3A'_3} = \vec{A_1A_3}+\beta\vec{u}$ pour un $\beta\in\mathbb{R}$

En utilisant les précédentes relations on obtient $\dfrac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1A_3}}\,\vec{A_1A_3}+\alpha\vec{u} = \dfrac{\overline{A'_1A'_2}}{\overline{A'_1A'_3}}\left(\vec{A_1A_3}+\beta\vec{u}\right)$ soit $\left(\dfrac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1A_3}} - \dfrac{\overline{A'_1A'_2}}{\overline{A'_1A'_3}}\right)\vec{A_1A_3} + \left(\alpha-\beta\dfrac{\overline{A'_1A'_2}}{\overline{A'_1A'_3}}\right)\vec{u}=0$

Or $\vec{A_1A_3}$ et $\vec{u}$ sont non colinéaires donc $\dfrac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1A_3}} - \dfrac{\overline{A'_1A'_2}}{\overline{A'_1A'_3}} = 0$

3. Notons $\vec{F}$ la partie $\{\vec{MN},\ M \text{ et } N \in F\}$ de E et pour $M \in F$ $\vec{F}_M$ la partie $\{\vec{MN},\ N \in F\}$ de E

On a clairement pour tout $M \in F$ $\vec{F}_M \subset \vec{F}$

Si F est vide, l'énoncé (iii) est faux. La négation de (ii) est $\exists M \in F$, $\vec{F}_M$ est un sev de E donc est fausse donc (ii) est vrai.
L'ensemble $\vec{F}$ est vide donc (i) est faux. Donc (ii) n'implique pas (i) ni (iii)

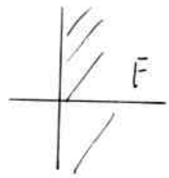
Si F est non vide on a clairement (ii) $\Rightarrow$ (iii). Montrons (iii) $\Rightarrow$ (ii) et (iii) $\Rightarrow$ (i)

Soit donc $M_0 \in F$ tel que $\vec{F}_{M_0}$ soit un sev de E. Pour $M, N \in F$ on a $\vec{MN} = \vec{M_0N} - \vec{M_0M} \in \vec{F}_{M_0}$ donc $\vec{F} \subset \vec{F}_{M_0}$. Or $\vec{F}_{M_0} \subset \vec{F}$ comme dit ci-dessus donc $\vec{F} = \vec{F}_{M_0}$ est un sev de E

La relation $\vec{MN} = \vec{M_0N} - \vec{M_0M}$ montre également qu'on a $\vec{F}_M = \{\vec{u} - \vec{M_0M},\ \vec{u} \in \vec{F}_{M_0}\} = t_{-\vec{M_0M}}(\vec{F}_{M_0})$ où $t_{-\vec{M_0M}}$ est la translation sur E de vecteur $-\vec{M_0M}$. Or pour $\vec{u} \in E$ $t_{\vec{u}}$ est une application bijective d'inverse $t_{-\vec{u}}$ et si $\vec{u} \in \vec{F}_{M_0}$ on a $t_{\vec{u}}(\vec{F}_{M_0}) \subset \vec{F}_{M_0}$ car $\vec{F}_{M_0}$ est un sous-esp. vect de E puis $\vec{F}_{M_0} = t_{-\vec{u}}(t_{\vec{u}}(\vec{F}_{M_0})) \subset t_{-\vec{u}}(\vec{F}_{M_0}) \subset \vec{F}_{M_0}$ (car $-\vec{u} \in \vec{F}_{M_0}$). On en conclut $\vec{F}_{M_0} = t_{-\vec{u}}(\vec{F}_{M_0})$

On a donc pour tout $M \in F$ $\vec{F}_M = \vec{F}_{M_0}$ donc $\vec{F}_M$ est un sev de E

Montrons pour terminer que (i) n'implique pas (ii) : On choisit pour F le sous ensemble $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^2$



On a $O = (0,0) \in F$ et $\vec{F}_O = F$ avec les notations ci-dessus. F n'est pas stable par multiplication par un scalaire : par exemple $(1,0) \in F$ mais $-1 \cdot (1,0) = (-1,0) \notin F$ donc (ii) n'est pas vérifiée.

Cependant (i) est vérifié : Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Si $x \geq 0$ on écrit $(x,y) = \vec{OM}$ avec $M = (x,y) \in F$ donc $\vec{OM} \in \vec{F}$
si $x < 0$ on écrit $(x,y) = \vec{MO}$ avec $M = (-x,-y) \in F$ donc $\vec{MO} \in \vec{F}$. Dans tous les cas $(x,y) \in \vec{F}$ donc $\vec{F} = \mathbb{R}^2$ et $\vec{F}$ est un sev de $\mathbb{R}^2$

Ceci montre que pour $E = \mathbb{R}^2$, (i) n'implique pas (ii)

Plus généralement supposons $E \neq \{0\}$ et soit $\vec{u} \in E \setminus \{0\}$. On prend $F = \{\lambda \vec{u},\ \lambda \in \mathbb{R}_+\}$ le même raisonnement montre $\vec{F} = \mathrm{Vect}(\vec{u})$ sev de E mais $\vec{F}_O = F$ n'est pas un sev de E

Conclusion (i) $\Leftarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii) et il n'y a pas d'autre implication si $E \neq \{0\}$. Si on suppose $F \neq \emptyset$ alors (ii) $\Leftrightarrow$ (iii)

4. Soient D, D' deux droites affines du plan. Si $D = D'$ alors $D \cup D' = D$ est un sous-espace affine du plan.

Si $D \neq D'$ on peut trouver A sur D mais pas sur D' et B sur D' mais pas sur D. Montrons que le milieu I de $[AB]$ n'est ni sur D ni sur D' : Si par exemple $I \in D$ comme $\vec{AB} = 2\vec{AI}$ on aurait $\vec{AB} \in \vec{D}$ puis $B \in D$ contradiction

Maintenant si F est un sous-espace affine contenant A et B alors $I \in F$: en effet $\vec{AB} \in \vec{F}$ donc $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB} \in \vec{F}$, or $A \in F$ donc $I \in F$

Conclusion : $D \cup D'$ n'est pas un sous-espace affine

5. $f : E \to F$ application linéaire. Soit $y \in F$. Si $f^{-1}(y) = \emptyset$ alors $f^{-1}(y)$ est un sous espace affine de E dont la direction est non définie

Sinon soit $x \in f^{-1}(y)$ ie $y = f(x)$. On a pour tout $x' \in E$
$$x' \in f^{-1}(y) \Leftrightarrow f(x') = y = f(x) \Leftrightarrow f(x) - f(x') = 0$$
$$\Leftrightarrow f(x - x') = 0 \quad (\text{car } f \text{ est linéaire})$$
$$\Leftrightarrow x' \in x + \mathrm{Ker}(f)$$

Or $\mathrm{Ker}(f) = \{z \in E,\ f(z) = 0\}$ est un sev de E (car f est linéaire) donc $x + \mathrm{Ker}(f)$ est un sous espace affine de E : le sous espace affine passant par x et de direction $\mathrm{Ker}(f)$

6. Soit (F_α) une famille de sous-espaces affines de E de direction $\vec{F}_\alpha$. Supposons $\bigcap_\alpha F_\alpha$ est non vide et soit $A \in \bigcap_\alpha F_\alpha$.

On va montrer $\bigcap_\alpha F_\alpha = A + \bigcap_\alpha \vec{F}_\alpha = \{M \in E,\ \vec{AM} \in \bigcap_\alpha \vec{F}_\alpha\}$. Comme $\bigcap_\alpha \vec{F}_\alpha$ est un sous-esp. vect de E, ceci prouvera que $\bigcap_\alpha F_\alpha$ est un sous esp. affine de direction $\bigcap_\alpha \vec{F}_\alpha$.

On a $\forall \alpha,\ A \in F_\alpha$ donc $F_\alpha = A + \vec{F}_\alpha = \{M \in E,\ \vec{AM} \in \vec{F}_\alpha\}$ donc $\bigcap_\alpha F_\alpha = \bigcap_\alpha \{M \in E,\ \vec{AM} \in \vec{F}_\alpha\} = \{M \in E,\ \forall \alpha\ \vec{AM} \in \vec{F}_\alpha\} = \{M \in E,\ \vec{AM} \in \bigcap_\alpha \vec{F}_\alpha\}$

7.a. Soient A, B deux points distincts d'un espace vectoriel $\vec{E}$ (ou plus généralement d'un espace affine E)

Si F est un sous-espace affine de E contenant A et B alors $\vec{AB} \in \vec{F}$ puis $\mathrm{Vect}(\vec{AB}) = \{\lambda \vec{AB},\ \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \vec{F}$. Par suite F contient le ss esp. affine $A + \mathrm{Vect}(\vec{AB}) = \{M \in E,\ \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \vec{AM} = \lambda \vec{AB}\}$. Réciproquement $A + \mathrm{Vect}(\vec{AB})$ est un sous-esp. affine contenant A et $\underbrace{B}_{= A + \vec{AB}}$. C'est donc le plus petit contenant A et B.

Puisque $A \neq B$, $\mathrm{Vect}(\vec{AB})$ est un sous-esp. vectoriel de dimension 1 donc $A + \mathrm{Vect}(\vec{AB})$ est une droite, d'où l'existence.

Si D est une droite contenant A et B alors $\mathrm{Vect}(\vec{AB}) \subset \vec{D}$. Comme $\mathrm{Vect}(\vec{AB})$ et $\vec{D}$ ont même dimension, on a en fait $\mathrm{Vect}(\vec{AB}) = \vec{D}$. puis

Comme $D = A + \vec{D}$ on a donc $D = A + \mathrm{Vect}(\vec{AB})$, d'où l'unicité

b. Soient A un point de E et D une droite de E. Soit D' une autre droite de E. On a $D' // D \iff \vec{D'} = \vec{D}$ (en toute généralité $D' // D \iff \vec{D'} \subset \vec{D}$ mais comme $\vec{D}$ et $\vec{D'}$ ont même dimension, $\vec{D'} \subset \vec{D} \iff \vec{D'} = \vec{D}$).

D'autre part $A \in D' \iff D' = A + \vec{D'}$. La seule droite passant par A et parallèle à D est donc $A + \vec{D}$.

c. On suppose $E = \mathbb{R}^2$. Soient D, D' deux droites non parallèles. Soient $\vec{u}$ un vecteur directeur de D et $\vec{v}$ un vecteur directeur de D'.

Comme D n'est pas parallèle à D' on a $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires, donc $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$

Soit maintenant A un point de D et B un point de D'. $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tq $\vec{AB} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$. Alors $M = A + \alpha \vec{u} = B - \beta \vec{v}$ est un point commun à D et à D' donc appartient à l'intersection.

Si M' est un autre point de $D \cap D'$ on a $\begin{cases} \vec{MM'} \in \vec{D} & \text{donc } \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \vec{MM'} = \lambda \vec{u} \\ \vec{MM'} \in \vec{D'} & \text{donc } \exists \mu \in \mathbb{R},\ \vec{MM'} = \mu \vec{v} \end{cases}$ mais alors $\lambda \vec{u} = \mu \vec{v}$ et comme $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires,

ceci implique $\lambda = \mu = 0$ donc $M' = M$

Conclusion : $D \cap D' = \{M\}$: D et D' sont sécantes.

Pour terminer soient D et D' deux droites parallèles d'un espace affine E. Si D et D' ne sont pas disjointes soit A un point dans l'intersection. Alors D et D' sont deux droites passant par A et parallèles à D donc $D = D'$ d'après (b)

8. P plan affine de $\mathbb{R}^3$, $A \in \mathbb{R}^3 \setminus P$, D droite passant par A

$\vec{P}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$ de dim 2. Soit $(\vec{v}, \vec{\omega})$ une base de $\vec{P}$.

$\vec{D}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$ de dim 1. Soit $(\vec{u})$ une base de $\vec{D}$ (autrement dit $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\vec{D}$).

Supposons que $\vec{D}$ n'est pas parallèle à P alors $\vec{u} \notin \vec{P}$ autrement dit la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{\omega})$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$

Soit alors O un point de P. Comme en 7c on écrit $\vec{OA} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{\omega}$ pour un certain triplet (α, β, γ) de réels et alors $M = A - \alpha \vec{u} = O + \beta \vec{v} + \gamma \vec{\omega}$ est un point commun de D et de P. Si M' est un autre point commun alors $\vec{MM'} \in \mathrm{Vect}(\vec{u}) \cap \mathrm{Vect}(\vec{v}, \vec{\omega}) = \{0\}$ donc $M = M'$

Remarque : On peut aussi invoquer le thm du cours sur l'intersection de deux sous-espaces affines. ~~Comme~~ Si D n'est pas parallèle à P alors $\vec{D} + \vec{P} = \mathbb{R}^3$ donc $D \cap P$ est un sous-espace affine non vide, de direction $\vec{D} \cap \vec{P} = \{0\}$ donc $D \cap P$ est un point.

9. (u,v,w) base de $\mathbb{R}^3$, $A \in \mathbb{R}^3$, D droite passant par A de vecteur directeur u

a. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on note $\Pi_\lambda = A + w + \lambda v$

Soit P un plan affine de $\mathbb{R}^3$. P contient $D \Leftrightarrow A \in P$ et $\vec{D} \subset \vec{P}$

$\Leftrightarrow A \in P$ et $\vec{u} \in \vec{P}$

Supposons cette condition vraie. P contient de plus $\Pi_\lambda \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Pi_\lambda} \in \vec{P} \Leftrightarrow w + \lambda v \in \vec{P}$

Donc P contient Π_λ et $D \Leftrightarrow A \in P$ et $\mathrm{Vect}(u, w+\lambda v) \subset \vec{P}$

Or u et $w + \lambda v$ ne sont pas colinéaires : $\alpha u + \beta w + \beta\lambda v = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0$ car (u,v,w) est une base. Donc $\mathrm{Vect}(u, w+\lambda v)$ est de dim 2 donc $\mathrm{Vect}(u, w+\lambda v) \subset \vec{P} \Leftrightarrow \mathrm{Vect}(u, w+\lambda v) = \vec{P}$

Conclusion P contient Π_λ et $D \Leftrightarrow P = A + \mathrm{Vect}(u, w+\lambda v)$ ce qui donne l'existence et l'unicité de P. On le note P_λ

b. Soit P un plan contenant D alors $\vec{u} \in \vec{P}$. On peut compléter (u) en une base (u, v') de $\vec{P}$ et P s'écrit $A + \mathrm{Vect}(u, v')$ avec v' non colinéaire à u. On écrit $v' = \alpha u + \beta v + \gamma w$ ((u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$) avec $(\beta,\gamma) \neq (0,0)$ (v' n'est pas colinéaire à u)

On a $P = P_\lambda \Leftrightarrow \mathrm{Vect}(u, v') = \mathrm{Vect}(u, w+\lambda v) \Leftrightarrow v' \in \mathrm{Vect}(u, w+\lambda v)$

$$\Leftrightarrow \exists (\alpha', \beta') \in \mathbb{R}^2,\ \underbrace{v'}_{\alpha u + \beta v + \gamma w} = \alpha' u + \beta' w + \beta' \lambda v$$

Nécessairement $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \gamma$ et $\beta'\lambda = \beta$ donc $P = P_\lambda \Leftrightarrow \gamma\lambda = \beta$

$\exists \lambda \in \mathbb{R},\ P = P_\lambda \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \gamma\lambda = \beta$ Cette dernière condition est vérifiée ssi $\beta = 0$ ou $\gamma \neq 0$ c'est à dire si et seul^t si $v' \notin \mathrm{Vect}(u,v)$ (le cas $\beta = 0$ et $\gamma = 0$ est exclu)

Or $v' \in \mathrm{Vect}(u,v) \Leftrightarrow \mathrm{Vect}(u,v') = \mathrm{Vect}(u,v)$ (v' n'est pas colinéaire à u !)

Conclusion Lorsque λ décrit $\mathbb{R}$, P_λ décrit tous les plans sauf $A + \mathrm{Vect}(u,v)$ = le plan passant par A et de direction $\mathrm{Vect}(u,v)$