L3 Option géométrie — Corrigé de la feuille 3

1. A,B,C,D quatre points distincts d'un espace affine. Ils sont alignés si il existe une droite $\mathcal{D}$ contenant A,B,C,D (c'est la définition).
On a clairement A,B,C,D alignés $\Rightarrow$ A,B,C alignés et B,C,D alignés.
Puisque $B\neq C$ le sous-espace affine engendré par B et C est la droite (BC). Alors pour toute droite $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}$ contient B et C ssi $\mathcal{D}=(BC)$.
Si A,B,C et B,C,D sont alignés alors $A\in(BC)$ et $D\in(BC)$ donc A,B,C,D sont alignés.
Si on ne suppose plus $B\neq C$ mais au contraire $B=C$ alors A,B,C sont alignés et B,C,D sont alignés, quelque soient A et D dans l'espace affine.
On perd donc l'équivalence entre les deux conditions.

2. $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, $P=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ ax+by+cz+d=0\}$

a. Si $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ l'application $f:(x,y,z)\mapsto ax+by+cz$ est une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}^3$. Son noyau $\operatorname{Ker} f$ est alors un plan vectoriel comme f est non nulle, $\operatorname{Im} f=\mathbb{R}$ en particulier $f^{-1}(-d)$ est non vide. $P=f^{-1}(-d)$ est donc un plan affine de direction $\operatorname{Ker} f$.

Supposons $(a,b,c)=(0,0,0)$. Si $d\neq 0$ alors $P=\emptyset$
si $d=0$ alors $P=\mathbb{R}^3$

b. $P'=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ a'x+b'y+c'z+d'=0\}$ où $(a',b',c')\neq(0,0,0)$

Notons f' la forme linéaire $(x,y,z)\mapsto a'x+b'y+c'z$
Si $(a,b,c)=\lambda(a',b',c')$ pour un $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ alors $\operatorname{Ker} f=\operatorname{Ker} f'$ et $P/\!/P'$. Inversement supposons $\operatorname{Ker} f=\operatorname{Ker} f'$ et soit $\vec{u}\in\mathbb{R}^3\setminus\operatorname{Ker} f'$. $\operatorname{Vect}(\vec{u})$ et $\operatorname{Ker} f'$ sont en somme directe et comme $\dim\operatorname{Ker} f'=2$ on a $\mathbb{R}^3=\operatorname{Vect}(\vec{u})\oplus\operatorname{Ker} f'$. Par choix de u, $f'(u)\neq 0$.
Soit $\vec{x}\in\mathbb{R}^3$; $\vec{x}$ s'écrit $\alpha\vec{u}+\vec{y}$ pour un unique couple $(\alpha,\vec{y})\in\mathbb{R}\times\operatorname{Ker} f'$. On a $f'(\vec{x})=\alpha f'(\vec{u})$
$f(\vec{x})=\alpha f(\vec{u})$ (car $y\in\operatorname{Ker} f'=\operatorname{Ker} f$)
donc $f(\vec{x})=\dfrac{f(\vec{u})}{f'(\vec{u})}f'(\vec{x})$. Or $\dfrac{f(\vec{u})}{f'(\vec{u})}$ ne dépend pas de x donc f est proportionnelle à f'. Au passage $f\neq 0\Leftrightarrow f(\vec{u})\neq 0\Leftrightarrow f=\lambda f'$ avec $\lambda\neq 0$

Conclusion $P/\!/P'\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\ (a,b,c)=\lambda(a',b',c')$

On a $P=P'\Leftrightarrow(P/\!/P'$ et $P\cap P'\neq\emptyset)$. Supposons donc $\exists\lambda\in\mathbb{R},\ (a,b,c)=\lambda(a',b',c')$. Le système d'équation $\begin{cases}a'x+b'y+c'z+d'=0\\ \lambda a'x+\lambda b'y+\lambda c'z+d=0\end{cases}$
a une solution ssi $d-\lambda d'=0$

Conclusion $P=P'$ ssi ~~fem~~ $\exists\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\ (a,b,c,d)=\lambda(a',b',c',d')$

On a $\dim(P\cap P')=1$ ssi $P\cap P'\neq\emptyset$ et $\dim(\vec{P}\cap\vec{P'})=1$. La condition $\dim(\vec{P}\cap\vec{P'})=1$ équivaut à (a,b,c) et (a',b',c') non colinéaires*
Si tel est le cas alors P est un plan et $\vec{P}+\vec{P'}=\mathbb{R}^3$ (car $\dim(\vec{P}+\vec{P'})+\dim(\vec{P}\cap\vec{P'})=\dim\vec{P}+\dim\vec{P'}=4$). Par suite $P\cap P'\neq\emptyset$, et $\dim(P\cap P')=\dim(\vec{P}\cap\vec{P'})$
par le thm du cours sur l'intersection de deux ss esp. affines.
Conclusion $\dim(P\cap P')=1$ ssi (a,b,c) et (a',b',c') sont non colinéaires.

* Explication : Cela vient du cours sur les systèmes d'équations linéaires mais on peut également l'expliquer comme suit.
Si (a,b,c) est proportionnel à (a',b',c') alors $\vec{P}\cap\vec{P'}=\vec{P'}$. Si (a,b,c) n'est pas proportionnel à (a',b',c') alors $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ donc $\vec{P}$ est un plan vectoriel et $\vec{P}\neq\vec{P'}$ d'après le début de 2b. Comme $\vec{P}$ et $\vec{P'}$ ont même dimension $\vec{P}\neq\vec{P'}$ équivaut à $\vec{P}\not\subset\vec{P'}$. Il existe donc $\vec{u}\in\vec{P}$ tq $\vec{u}\notin\vec{P'}$ mais alors $\operatorname{Vect}(\vec{u})\oplus\vec{P'}=\mathbb{R}^3$ donc $\vec{P}+\vec{P'}=\mathbb{R}^3$ donc $\dim(\vec{P}\cap\vec{P'})=\dim\vec{P}+\dim\vec{P'}-\dim(\vec{P}+\vec{P'})=1$

3. $A \neq B$ $M \in (AB)$ alors $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ tq $M = A + \alpha \vec{AB}$ donc $\vec{AM} = \alpha \vec{AM} + \alpha \vec{MB}$ donc $(1-\alpha)\vec{MA} + \alpha \vec{MB} = 0$

M est barycentre du système $(A, 1-\alpha), (B, \alpha)$. Clairement M est également barycentre du système $(A, \lambda(1-\alpha)), (B, \lambda\alpha)$ pour tout $\lambda \neq 0$

Si M est égal^t barycentre de $(A,\alpha'), (B,\beta')$ avec $\alpha'+\beta' \neq 0$ alors $\alpha'\vec{MA} + \beta'\vec{MA} + \beta'\vec{AB} = 0$ soit $\vec{AM} = \frac{\beta'}{\alpha'+\beta'}\vec{AB} = \alpha \vec{AB}$

comme $\vec{AB} \neq 0$ nécessairement $\frac{\beta'}{\alpha'+\beta'} = \alpha$ d'où $(\alpha', \beta') = (\alpha'+\beta')\,(1-\alpha, \alpha)$

Conclusion : l'ensemble $\{(\alpha',\beta'),\ M = \mathrm{Bar}((A,\alpha'),(B,\beta'))\}$ est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ $\mathrm{Vect}((1-\alpha,\alpha))$ privée de $(0,0)$

"7" A, B deux points distincts, $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, C point tq $\vec{AC} = \lambda \vec{AB}$

a. On cherche $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ tq $\begin{cases} \beta\vec{AB} + \gamma\vec{AC} = 0 & (1) \\ \gamma\vec{BC} + \alpha\vec{BA} = 0 & (2) \\ \alpha\vec{CA} + \beta\vec{CB} = 0 & (3) \end{cases}$ et $\beta+\gamma \neq 0$, $\gamma+\alpha \neq 0$, $\alpha+\beta \neq 0$

(1) - (2) donne $(\alpha+\beta)\vec{AB} + \gamma(\vec{AC}+\vec{CB}) = 0$ soit $(\alpha+\beta+\gamma)\vec{AB} = 0$ et comme $\vec{AB} \neq 0$ $\alpha+\beta+\gamma = 0$

(1) - (3) donne $\beta(\vec{AB}+\vec{BC}) + (\gamma+\alpha)\vec{AC} = 0$ ce qui équivaut à $\alpha+\beta+\gamma = 0$ car $\vec{AC} \neq 0$

Donc si (1) est vérifiée et $\alpha+\beta+\gamma = 0$ alors (2) et (3) sont vérifiées

D'autre part si $\alpha+\beta+\gamma = 0$ alors les conditions $\beta+\gamma \neq 0$, $\gamma+\alpha \neq 0$, $\alpha+\beta \neq 0$ sont équivalentes à $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ et $\gamma \neq 0$ respect^t.

On cherche donc l'ensemble E des $(\alpha,\beta,\gamma) \in (\mathbb{R}\setminus\{0\})^3$ tq $\alpha+\beta+\gamma = 0$ et $\beta\vec{AB} + \gamma\vec{AC} = 0$

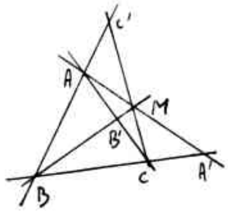
Or $\vec{AC} = \lambda\vec{AB}$ donc $\beta\vec{AB} + \gamma\vec{AC} = 0 \Leftrightarrow (\beta+\gamma\lambda)\vec{AB} = 0 \Leftrightarrow \beta+\gamma\lambda = 0 \Leftrightarrow (\beta,\gamma) = \gamma(-\lambda, +1)$

Donc $E = \{(\alpha,\beta,\gamma) \in (\mathbb{R}\setminus\{0\})^3,\ \beta = -\gamma\lambda,\ \alpha = \gamma(\lambda-1)\} = \{\gamma(\lambda-1, -\lambda, 1),\ \gamma \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\}$

b. $\alpha\vec{OA} + \beta\vec{OB} + \gamma\vec{OC} = \alpha\vec{OC} + \alpha\vec{CA} + \beta\vec{OC} + \beta\vec{CB} + \gamma\vec{OC} = (\alpha+\beta+\gamma)\vec{OC}$ si $(\alpha,\beta,\gamma) \in E$ car alors $\alpha\vec{CA} + \beta\vec{CB} = 0$

$= 0$ si $(\alpha,\beta,\gamma) \in E$

4.



A, B, C non alignés alors (A,B,C) est un repère affine du plan. Pour tout point M il existe un unique triplet (α,β,γ) de réels tq $\alpha+\beta+\gamma = 1$ et $M = \mathrm{Bar}((A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma))$.

Supposons $A \neq M$ et (AM) intersecte (BC) en un point A'. Notons (α',β',γ') les coordonnées barycentrique de A' ds le repère (A,B,C). On a $A' \in (BC) \Leftrightarrow \alpha' = 0$ et ces deux conditions caractérisent A'

$M \in (AA') \Leftrightarrow M$ est barycentre de A et A'

Or si $\beta+\gamma \neq 0$ M est barycentre de $((A,\alpha), (\mathrm{Bar}((B,\beta),(C,\gamma)), \beta+\gamma))$ par "transitivité" du calcul du barycentre et $\mathrm{Bar}((B,\beta),(C,\gamma)) \in (BC)$

donc si $\beta+\gamma \neq 0$ $A' = \mathrm{Bar}((B,\beta),(C,\gamma))$ ie (α',β',γ') est proportionnel à $(0,\beta,\gamma)$

si $\beta+\gamma = 0$ alors $\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} + \gamma\vec{MC} = \alpha\vec{MA} + \gamma\vec{BC} = 0$ et $\alpha = 1$ (car $\alpha+\beta+\gamma = 1$) donc $\vec{MA}$ est colinéaire à $\vec{BC}$ ce qui est interdit par l'existence de A'

Conclusion $(M \neq A$ et (AM) intersecte $(BC)) \Leftrightarrow \beta+\gamma \neq 0$ et alors $(0,\beta,\gamma)$ est une famille de coordonnées barycentriques du point d'intersection ds le repère (A,B,C).

Supposons $\beta+\gamma \neq 0$. On a $\beta\vec{A'B} + \gamma\vec{A'C} = 0$ donc $(A' \neq B$ et $A' \neq C) \Leftrightarrow \gamma \neq 0$ et $\beta \neq 0$ $(\Leftrightarrow M \notin (AB)$ et $M \notin (AC))$

Si ces conditions sont satisfaites on a $\vec{A'B} = -\frac{\gamma}{\beta}\vec{A'C}$ donc $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = -\frac{\gamma}{\beta}$

Maintenant si $\alpha, \beta, \gamma, \alpha+\beta, \beta+\gamma, \alpha+\gamma$ sont tous non nuls alors les points d'intersection A', B', C' existent, sont différents de A, B, C et admettent pour coordonnées barycentriques respectives $(0,\beta,\gamma), (\alpha,0,\gamma), (\alpha,\beta,0)$ ds le repère affine (A,B,C)

(4.) On a alors $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\,\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\,\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \left(-\frac{\gamma}{\beta}\right)\left(-\frac{\alpha}{\gamma}\right)\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) = -1$

Inversement soient A', B', C' des points de $(BC), (CA), (AB)$ respectivement, distincts de A, B, C. On suppose $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\,\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\,\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$ $(*)$.

On a $\overrightarrow{A'B} = \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\overrightarrow{A'C}$ donc A' est barycentre des points pondérés $(B, \overline{A'C}), (C, -\overline{A'B})$ pourvu que $\overline{A'C} - \overline{A'B} \neq 0$ Mais $\overline{A'C} = \overline{A'B}$ est impossible si $B \neq C$

De même B' est barycentre de $(A, \overline{B'C}), (C, -\overline{B'A})$ et

C' —— $(A, \overline{C'B}), (B, -\overline{C'A})$

Posons ~~donc~~ $\beta = \overline{A'C}$ et $\gamma = -\overline{A'B}$. Soit α tq (α, β) est proportionnel à $(\overline{C'B}, -\overline{C'A})$ ie $\alpha = -\beta\frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}}$

Alors la relation $(*)$ implique que (α, γ) est proportionnel à $(\overline{B'C}, -\overline{B'A})$ On en déduit que les triplets $(0, \beta, \gamma), (\alpha, 0, \gamma), (\alpha, \beta, 0)$ sont des familles de coordonnées barycentriques des points A', B', C' respectivement ds le repère (A, B, C).

Supposons $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et soit $\Pi = \mathrm{Bar}((A,\alpha), (B,\beta), (C,\gamma))$ alors $\Pi \neq A, B, C$ et $A' \in (\Pi A)$, $B' \in (\Pi B)$, $C' \in (\Pi C)$ d'après ce qui précède donc les trois droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en Π.

Supposons $\alpha + \beta + \gamma = 0$ et soit $\vec{u} = \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} \neq 0$ car $(\beta, \gamma) \neq (0,0)$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une famille libre de vecteurs

On a $\vec{u} = (\beta + \gamma)\overrightarrow{AA'}$ car $A' = \mathrm{Bar}((B,\beta), (C,\gamma))$, donc $\overrightarrow{AA'}$ est colinéaire à $\vec{u}$

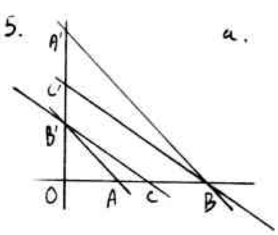
On a aussi $\vec{u} = \alpha\overrightarrow{BA} + \gamma\overrightarrow{BC}$ ($\Pi \mapsto \alpha\overrightarrow{\Pi A} + \beta\overrightarrow{\Pi B} + \gamma\overrightarrow{\Pi C}$ est une application constante)

$= (\alpha + \gamma)\overrightarrow{BB'}$ donc $\overrightarrow{BB'}$ est colinéaire à $\vec{u}$

et $\vec{u} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{CC'}$ donc $\overrightarrow{CC'}$ est colinéaire à $\vec{u}$

Conclusion : si $\alpha + \beta + \gamma = 0$ alors les droites $(AA'), (BB'), (CC')$ sont parallèles

5.



a. On suppose a, b, c, a', b', c' tous non nuls

Par le Thm de Thalès on a $(AB') // (A'B) \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{b'}{a'}$

$(BC') // (B'C) \Leftrightarrow \frac{b}{c} = \frac{c'}{b'}$

Si ces deux conditions sont satisfaites alors $\frac{a}{c} = \frac{a}{b}\,\frac{b}{c} = \frac{b'}{a'}\,\frac{c'}{b'} = \frac{c'}{a'}$ donc $(AC') // (A'C)$

Rq On peut retrouver le Thm de Thalès comme suit : la droite (AB') admet pour équation cartésienne ds le repère canonique de $\mathbb{R}^2$

$b'x + ay = ab'$. De même $(A'B)$ admet pour équation $a'x + by = a'b$. Ces deux droites sont parallèles ssi (b', a) et (a', b) sont proportionnels ce qui équivaut à $\frac{b'}{a'} = \frac{a}{b}$ (puisque a, b, a', b' sont non nuls)

b. On suppose que les droites (BC') et $(B'C)$ sont sécantes en $U = (x_0, y_0)$

(CA') et $(C'A)$ $V = (x_1, y_1)$

(AB') et $(A'B)$ $W = (x_2, y_2)$

Une équation de (BC') est $\frac{x_0}{b} + \frac{y_0}{c'} = 1$ et le système ainsi formé est équivalent à

$(B'C)$ $\frac{x_0}{c} + \frac{y_0}{b'} = 1$

$$\begin{cases} \frac{x_0}{b} + \frac{y_0}{c'} = 1 & (0) \\ x_0\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right) - y_0\left(\frac{1}{c'} - \frac{1}{b'}\right) = 0 & (0') \end{cases}$$

De même (x_1, y_1) est solution du système $\begin{cases} \dfrac{x_1}{c} + \dfrac{y_1}{a'} = 1 & (1) \\ x_1\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{c}\right) - y_1\left(\dfrac{1}{a'} - \dfrac{1}{c'}\right) = 0 & (1') \end{cases}$

(x_2, y_2) — $\begin{cases} \dfrac{x_2}{a} + \dfrac{y_2}{b'} = 1 & (2) \\ x_2\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right) - y_2\left(\dfrac{1}{a'} - \dfrac{1}{b'}\right) = 0 & (2') \end{cases}$

On veut montrer que U, V, W sont alignés, c'est à dire si $U \neq V$ que (x_2, y_2) est combinaison barycentrique de (x_0, y_0) et de (x_1, y_1) ie qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha + \beta = 1$ et $(x_2, y_2) = \alpha(x_0, y_0) + \beta(x_1, y_1)$

On observe que l'équation $(2')$ est la somme des eq (0) et $(1')$. Supposons pour simplifier ~~[illegible]~~ $a \neq b$ et $a' \neq b'$ alors on déduit de l'observation que pour tout couple (α, β) de réels on a $x_2 = \alpha x_0 + \beta x_1 \Leftrightarrow y_2 = \alpha y_0 + \beta y_1$

Si $U \neq V$ alors ~~[illegible]~~ $x_0 \neq x_1$ ou $y_0 \neq y_1$. Si par exemple $x_0 \neq x_1$ alors $\exists!\, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tq $\alpha + \beta = 1$ et $x_2 = \alpha x_0 + \beta x_1$ (car (x_0, x_1) est un repère affine de $\mathbb{R}$) et alors $y_2 = \alpha y_0 + \beta y_1$ d'après ce qui précède donc U, V, W sont alignés.

Si $U = V$ les points U, V, W sont évidemment alignés.

Enfin si la condition $a \neq b$ et $a' \neq b'$ n'est pas vérifiée, par exemple si $a = b$ alors $A = B$ alors $W = A$ et les points U, V, W sont sur la droite (AC') donc sont alignés.

7. X, Y esp affines de dim finie, $f : X \to Y$ appl. affine de partie linéaire $\varphi : \vec{X} \to \vec{Y}$

Soit O un point de X. On a pour tout point $M \in X$ $f(M) = f(O) + \varphi(\overrightarrow{OM})$ donc $\forall M, M' \in X$ $f(M) = f(M') \Leftrightarrow \varphi(\overrightarrow{OM}) = \varphi(\overrightarrow{OM'})$ $\Leftrightarrow \varphi(\overrightarrow{MM'}) = 0$

Si φ est injective, $\varphi(\overrightarrow{MM'}) = 0 \Rightarrow M = M'$ donc f est injective

Si f est injective on a $\varphi(\overrightarrow{MM'}) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = 0$ or $\overrightarrow{MM'}$ décrit $\vec{X}$ entier lorsque M, M' décrivent X donc $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$ donc φ est injective.

Si f est surjective, $f(M)$ décrit Y entier lorsque M décrit X donc $\overrightarrow{f(O)f(M)}$ ~~[illegible]~~ $= \varphi(\overrightarrow{OM})$ décrit $\vec{Y}$ entier donc φ est surjective.

Si φ est surjective $\varphi(\overrightarrow{OM})$ décrit $\vec{Y}$ entier lorsque M décrit X donc $f(M)$ décrit Y entier

On en déduit f bijective $\Leftrightarrow$ φ est un isomorphisme. Or φ iso $\Leftrightarrow (\operatorname{Ker} \varphi = 0$ et $\dim \vec{X} = \dim \vec{Y})$

6. $f : X \to Y$ appl. affine bijective de partie linéaire φ. On a pour tous $M, M' \in X$

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{f^{-1}(f(M))\, f^{-1}(f(M'))} = \varphi^{-1}(\varphi(\overrightarrow{MM'})) = \varphi^{-1}(\overrightarrow{f(M)f(M')})$$

donc $\forall N, N' \in Y$ $\overrightarrow{f^{-1}(N)\, f^{-1}(N')} = \varphi^{-1}(\overrightarrow{NN'})$

Or φ^{-1} est linéaire donc f^{-1} est affine de partie linéaire φ^{-1}.

Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ appl. affines de partie linéaire φ et ψ respectivement. Alors pour $M, N \in X$ on a $\overrightarrow{g(f(M))\, g(f(N))} = \psi(\overrightarrow{f(M)f(N)}) = \psi(\varphi(\overrightarrow{MN}))$

Or $\psi \circ \varphi$ est linéaire donc $g \circ f$ est affine de partie linéaire $\psi \circ \varphi$.

Notons $GA(X)$ l'ensemble des applications affines bijectives $X \to X$. $GA(X)$ est un sous-ensemble ~~de l'ensemble~~ du groupe des bijections d'ensembles $X \to X$ qui est stable par composition et par passage à l'inverse. C'est donc un sous-groupe du groupe des bijections de X ds X.