8. $f : X \to X$ application affine de partie linéaire φ. Notons $F = \{M \in X, f(M) = M\}$ et supposons $F \neq \emptyset$. On choisit alors $A \in F$.

Pour $M \in X$ on a $M \in F \Leftrightarrow f(M) = M \Leftrightarrow \overrightarrow{Af(M)} = \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{f(A)f(M)} = \overrightarrow{AM}$ (car $f(A) = A$)

$\Leftrightarrow \varphi(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \in \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id}) \Leftrightarrow M \in A + \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})$

Or $\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{X}$ donc F est le sous-espace affine passant par A de direction $\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})$

Supposons maintenant que 1 n'est pas valeur propre de X et que X est de dimension finie. $\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id}) = \{0\}$ donc $\mathrm{rang}(\varphi - \mathrm{Id}) = \dim \vec{X}$ donc $\varphi - \mathrm{Id}$ est surjective et injective, donc est une bijection (un isomorphisme en fait).

On cherche M tq $f(M) = M$. Soit A un point de X. On a $f(M) = M \Leftrightarrow \overrightarrow{Af(M)} = \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{Af(A)} + \overrightarrow{f(A)f(M)} = \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{Af(A)} + \varphi(\overrightarrow{AM}) - \overrightarrow{AM} = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = (\varphi - \mathrm{Id})^{-1}(-\overrightarrow{Af(A)})$

Or un point M vérifiant cette dernière condition existe et est unique.

9. $A_0, \dots, A_n$ $n+1$ points de X. $H = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \sum x_i = 1\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^{n+1}$ de direction $\{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \sum x_i = 0\}$

a. Soit $\phi : H \to X$, $(x_0, \dots, x_n) \mapsto \mathrm{Bar}((A_i, x_i)_i)$ bien défini car $\sum x_i \neq 0$. Choisissons un point $O \in X$ (on peut prendre $O = A_0$).

On a $\overrightarrow{O\phi(x_0, \dots, x_n)} = \sum_{i=0}^{n} x_i \overrightarrow{OA_i}$ car $\sum_i x_i \overrightarrow{\phi(x_0, \dots, x_n) A_i} = 0$ et $\sum_i x_i = 1$

Pour $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \vec{H}$ on a $\overrightarrow{O\phi(x_0 + \alpha_0, \dots, x_n + \alpha_n)} = \sum_i (x_i + \alpha_i) \overrightarrow{OA_i} = \overrightarrow{O\phi(x_0, \dots, x_n)} + \sum_i \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$

ie $\phi((x_0, \dots, x_n) + (\alpha_0, \dots, \alpha_n)) = \phi(x_0, \dots, x_n) + \sum_i \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$

Or l'application $\vec{H} \to \vec{X}$, $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \mapsto \sum_i \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$ est linéaire donc ϕ est affine.

ϕ est bijective si et seulement si sa partie linéaire $\vec{\phi} : (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \mapsto \sum \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$ est un isomorphisme.

Choisissons $O = A_0$ de sorte que $\vec{\phi}(\alpha_0, \dots, \alpha_n) = \alpha_1 \overrightarrow{A_0A_1} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{A_0A_n}$. Observons que l'application $\varphi : \mathbb{R}^n \to \vec{H}$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mapsto (-\sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$

est linéaire et bijective de sorte que $\vec{\phi}$ est un isomorphisme ssi $\vec{\phi} \circ \varphi$ est un isomorphisme.

Or $\vec{\phi} \circ \varphi$ est injective $\Leftrightarrow (\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ est une famille libre de $\vec{X}$ $\Leftrightarrow (A_0, \dots, A_n)$ est une famille de points affinement indépendants

$\vec{\phi} \circ \varphi$ est surjective $\Leftrightarrow (\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ est une famille génératrice de $\vec{X}$ $\Leftrightarrow$ le ss esp. affine engendré par $A_0, \dots, A_n$ est X

Donc $\vec{\phi} \circ \varphi$ est bijective $\Leftrightarrow (A_0, \dots, A_n)$ est un repère affine de X

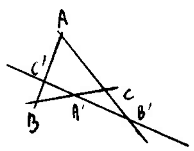
b. On suppose $(A_0, \dots, A_n)$ repère affine de X. Soient Y esp. affine, $f : X \to Y$ application d'ensembles. $\psi : H \to Y$, $(x_i) \mapsto \mathrm{Bar}((f(A_i), x_i)_i)$

Si f est affine alors f conserve le barycentre : Si $G = \mathrm{Bar}((A_i, x_i))$ alors $\sum_i x_i \overrightarrow{GA_i} = 0$ donc $\vec{f}(\sum_i x_i \overrightarrow{GA_i}) = 0$.

Or $\vec{f}(\sum_i x_i \overrightarrow{GA_i}) = \sum_i x_i \vec{f}(\overrightarrow{GA_i}) = \sum_i x_i \overrightarrow{f(G)f(A_i)}$. On en déduit que $f(G) = \mathrm{Bar}((f(A_i), x_i)_i)$, autrement dit $f(\phi(x_0, \dots, x_n)) = \psi(x_0, \dots, x_n)$.

Inversement si f conserve les barycentres alors $\psi = f \circ \phi$. Or ϕ est une bijection affine d'après a) donc la relation s'écrit $f = \psi \circ \phi^{-1}$.

Or ψ est affine d'après a) et ϕ^{-1} est affine comme réciproque d'une application affine, donc $\psi \circ \phi^{-1}$ est affine comme composée d'applications affines.

10. 

A, B, C non alignés

$A' \in (BC) \setminus \{B, C\}$

$B' \in (AC) \setminus \{A, C\}$

$A' \neq B$ donc $\overline{A'B} \neq 0$. Soit h l'homothétie de centre A' de rapport $-\frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}}$ de sorte qu'on a $h(A') = A'$ et $h(B) = C$

g B' $-\frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}}$ $g(B') = B'$ et $g(C) = A$

Supposons $\frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} \neq 1$ alors $g \circ h$ est une homothétie de rapport $\frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}}$: $g \circ h(B) = g(C) = A$ donc le centre de $g \circ h$ est sur la droite (AB)

$g \circ h(A') = g(A') \in (A'B')$ et $g(A') \neq A'$ car $A' \neq B'$ donc $(g(A')A') = (A'B')$ donc le centre de $g \circ h$ est sur $(A'B')$

On vérifie que la droite $(A'B')$ n'est pas confondue avec la droite (AB) (sinon on aurait $A' \in (AB)$ et $A' \in (BC)$ donc $A' = B$ ce qui est exclus.) On en déduit que le centre de $g \circ h$ est le point d'intersection de $(A'B')$ avec (AB). Appelons le C''. On a $C'' \neq B$ sinon B' serait sur (BC) donc serait égal à C.

On a $g \circ h(B) = A$ et $g \circ h$ de centre C'' donc $\dfrac{\overline{C''A}}{\overline{C''B}}$ = rapport de l'homothétie $g \circ h = \dfrac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} \dfrac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}}$

On a donc $\dfrac{\overline{C''A}}{\overline{C''B}} \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = 1$ puis $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{\overline{C''A}}{\overline{C''B}} = \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} \Leftrightarrow C'' = C'$

Or $C'' = C' \Leftrightarrow A', B', C'$ sont alignés.

Supposons maintenant $\dfrac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} \dfrac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} = 1$ ie $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \dfrac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}}$ alors $\dfrac{\overline{A'C} + \overline{CB}}{\overline{A'C}} = \dfrac{\overline{B'C} + \overline{CA}}{\overline{B'C}}$ donc $\dfrac{\overline{CB}}{\overline{CA'}} = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB'}}$

D'après le théorème de Thalès ceci implique $(A'B')$ parallèle à (AB). Mais alors C' ne peut être aligné avec A', B' et $\dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$ ne peut être égal à 1 (Il faudrait pour l'une comme pour l'autre condition que C' soit « à l'infini ».)

Conclusion. dans tous les cas $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1 \Leftrightarrow A', B', C'$ sont alignés.

b. On suppose que les droites (AA'), (BB') et (CC') ~~sont~~ s'intersectent en un point Π.

En appliquant le résultat a) au triangle $AA'C$ et aux points $\Pi \in (AA')$, $B \in (A'C)$ et $B' \in (AC)$ on obtient $\dfrac{\overline{\Pi A}}{\overline{\Pi A'}} \dfrac{\overline{BA'}}{\overline{BC}} \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = 1$ car les points Π, B, B' sont alignés. (Il faudrait vérifier $\Pi \neq A$ et $\Pi \neq A'$)

De même en appliquant a) au triangle $AA'B$ et aux points $\Pi \in (AA')$, $C \in (A'B)$ et $C' \in (AB)$ on obtient $\dfrac{\overline{\Pi A}}{\overline{\Pi A'}} \dfrac{\overline{CA'}}{\overline{CB}} \dfrac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}} = 1$

En multipliant la première relation par l'inverse de la seconde on obtient $\dfrac{\overline{BA'}}{\overline{CA'}} \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} \dfrac{\overline{CB}}{\overline{BC}} = 1$. Or $\overline{CB} = -\overline{BC}$ d'où $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$

11. Voir corrigé du partiel de novembre 2004