Corrigé de la feuille TD n°4

Exercice 1. X est un espace affine non vide de dimension $n \geqslant 2$, H_1, H_2, H_3 trois hyperplans affines parallèles entre eux et distincts, D, D' deux droites dont la direction n'est pas incluse dans celle de H_1.

a) On va montrer que chacune des droites D et D' intersecte les hyperplans H_1, H_2, H_3 en des points A_1, A_2, A_3 et A'_1, A'_2, A'_3 respectivement.
Il nous suffit d'établir le résultat pour D (le cas de D' étant analogue). Notons $\vec{D}$ la direction de D et $\vec{H}$ la direction commune des hyperplans H_1, H_2, H_3. Comme la droite vectorielle $\vec{D}$ n'est pas incluse dans $\vec{H}$ et que $\dim_K \vec{H} = n-1$, on a $\vec{X} = \vec{H} \oplus \vec{D}$ (K désigne le corps de base: $K = \mathbb{R}$ pour fixer les idées). On en déduit que la droite D intersecte l'hyperplan H_i $(i = 1, 2, 3)$ en un point unique A_i. Plus précisément, soit O un point de D et ω_i $(i = 1, 2, 3)$ un point de H_i, alors $\overrightarrow{O\omega_i}$ s'écrit de manière unique $\overrightarrow{O\omega_i} = \vec{u} + \vec{v}$, avec $\vec{u} \in \vec{H}$ et $\vec{v} \in \vec{D}$. On en déduit $O + \vec{v} = \omega_i - \vec{u} = A_i$.

b) Montrons que $\dfrac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1A_3}} = \dfrac{\overline{A'_1A'_2}}{\overline{A'_1A'_3}}$. On notera que les hyperplans parallèles étant distincts, les mesures algébriques $\overline{A_1A_3}$ et $\overline{A'_1A'_3}$ sont non nulles. Considérons $p\colon X \longrightarrow X$ la projection sur D' parallèlement à H_1. Pour $M \in X$, M' est l'unique point d'intersection de D' avec l'hyperplan $(M + \vec{H})$. p est une application affine (voir cours) dont l'image est la droite D'. Comme $\overrightarrow{A_1A_2} = \dfrac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1A_3}}\overrightarrow{A_1A_3}$, on a $\overrightarrow{p(A_1)p(A_2)} = \dfrac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1A_3}}\overrightarrow{p(A_1)p(A_3)}$, d'où $\overrightarrow{A'_1A'_2} = \dfrac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1A_3}}\overrightarrow{A'_1A'_3}$. Conclusion: $\dfrac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1A_3}} = \dfrac{\overline{A'_1A'_2}}{\overline{A'_1A'_3}}$.

Exercice 2. *Théorème de Desargues*. Dans le plan, ABC et $A'B'C'$ sont deux triangles sans sommet commun. On suppose $(AB)//(A'B')$, $(BC)//(B'C')$ et $(CA)//(C'A')$. Montrons que dans ces conditions, les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles.
Remarquons que les points A, B, C n'étant pas alignés, au moins deux des trois droites (AA'), (BB') et (CC') sont distinctes. Nous pouvons donc supposer par exemple que $(AA') \neq (BB')$. Etant dans un plan, les droites (AA') et (BB') sont sécantes ou parallèles.

1. Si (AA') et (BB') sont sécantes en un point O, les conditions $(AA') \neq (BB')$ et $(AB)//(A'B')$ entraînent ($O \neq A$, $O \neq A'$, $O \neq B$ et $O \neq B'$). Soit alors h l'homothétie de centre O qui envoie A sur A'. $h(B)$ est l'intersection de $(OB) = (BB')$ avec la parallèle à (AB) par A'. Comme on a $(A'B')//(AB)$ et $B' \in (OB)$, on en déduit $h(B) = B'$. h étant une homothétie, on a $(AC)//(h(A)h(C))$, c'est-à-dire $(AC)//(A'h(C))$. C étant à l'intersection de (BC) et (CA), $h(C)$ est à l'intersection de la parallèle à (BC) par B' et de la parallèle à (CA) par A', d'où $h(C) = C'$. Conclusion: (CC') passe par O, donc les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

2. Supposons $(AA')//(BB')$. Les hypothèses $(AB)//(A'B')$ et $(AA') \neq (BB')$ entraînent que $ABB'A'$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$. La translation τ de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ envoie donc A sur A' et B sur B'. $\tau(C)$ est à l'intersection de la parallèle à (BC) par B' et de la parallèle à (CA) par A', d'où $\tau(C) = C'$. Conclusion: les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles.

Exercice 3. X est un espace affine non vide de dimension finie.

a) *Composée d'homothéties et de translations*. On se contentera de composer des homothéties ou des translations non triviales, c'est-à-dire des translations de vecteurs non nuls et des homothéties de rapports différents de 0 et 1.
Soit h_1 (resp. h_2) une homothétie de centre ω_1 (resp. ω_2) et de rapport λ_1 (resp. λ_2). Soit t_{v_1} (resp. t_{v_2}) une translation de vecteur v_1 (resp. v_2). Alors on a:

- $t_{v_2} \circ t_{v_1} = t_{v_1+v_2}$
- $h_2 \circ t_{v_1} = h_{w_2 + \frac{\lambda_2}{1-\lambda_2}v_1, \lambda_2}$ (homothétie de centre $\omega = w_2 + \dfrac{\lambda_2}{1-\lambda_2}v_1$ et de rapport λ_2).
- $t_{v_2} \circ h_1 = h_{w_1 + \frac{1}{1-\lambda_1}v_2, \lambda_1}$ (homothétie de centre $\omega = w_1 + \dfrac{1}{1-\lambda_1}v_2$ et de rapport λ_1).
- si $\lambda_1\lambda_2 \neq 1$, $h_2 \circ h_1 = h_{\omega_1 + \frac{\lambda_2 - 1}{\lambda_1\lambda_2 - 1}\overrightarrow{\omega_1\omega_2}, \lambda_1\lambda_2}$ (homothétie de centre et de rapport $\lambda_1\lambda_2$)
- si $\lambda_1\lambda_2 = 1$, $h_2 \circ h_1 = t_{(1-\lambda_2)\overrightarrow{\omega_1\omega_2}}$ (translation de vecteur $\overrightarrow{\omega_1\omega_2}$).

b) Soit $f\colon X \longrightarrow X$ une application affine injective. Montrons que f est une homothétie (de rapport non nul) ou une translation si et seulement si f transforme une droite en une droite qui lui est parallèle. Nous supposons évidemment X de dimension au moins 1 et nous prendrons pour corps de base $\mathbb{R}$.

- Supposons que f est une homothétie ou une translation. Si φ désigne la partie linéaire de f, on a $\varphi = \lambda \mathrm{Id}_{\vec{X}}$. f étant injective, on a $\lambda \neq 0$ ($\lambda = 1$ lorsque f est une translation). Etant donnée une droite $D = (AB)$ (A et B deux points distincts de X), $f(D)$ est un sous-espace affine de X contenant $f(A)$ est dont la direction est le sous-espace vectoriel de $\vec{X}$ engendré par $\varphi(\overrightarrow{AB}) = \lambda\overrightarrow{AB}$. Comme $\lambda \neq 0$, $f(D)$ est la droite affine passant par $f(A)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$. Conclusion: si f est une homothétie (de rapport non nul) ou une translation, alors f transforme une droite en une droite qui lui est parallèle.

- Supposons que f transforme toute droite de X en une droite qui lui est parallèle. Etant donnée une origine x_0 de X, pour tout $v \in \vec{X}$, on a $\overrightarrow{f(x_0)f(x_0+v)} = \lambda_v \cdot v$, où $\lambda_v \in \mathbb{R}$. On a $\lambda_v \neq 0$ dès que $v \neq 0$ car f est supposée injective. Autrement dit, si φ est la partie linéaire de f, alors pour tout $v \in \vec{X}$, il existe $\lambda_v \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(v) = \lambda_v \cdot v$. Il ne reste plus alors qu'à vérifier que φ est une homothétie vectorielle. Fixons nous un vecteur non nul $u \in \vec{X}$ et montrons que pour tout vecteur non nul $v \in \vec{X}$, dans l'égalité $\varphi(v) = \lambda_v \cdot v$, on a $\lambda_v = \lambda_u$:

  - si v est colinéaire à u, alors $v = \alpha u$, avec α réel non nul. φ étant linéaire, on a $\varphi(v) = \alpha\varphi(u)$. D'où $\alpha\lambda_u u = \lambda_v \alpha u$. Comme $\alpha \neq 0$, on a $\lambda_v = \lambda_u$.

  - si v n'est pas colinéaire à u, alors X est au moins de dimension 2 et (u,v) est libre. Nous savons par hypothèse qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$, tel que $\varphi(u+v) = \mu(u+v)$. Par ailleurs, φ étant linéaire, nous avons $\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v) = \lambda_u u + \lambda_v v$.
    On en déduit la relation: $(\mu - \lambda_u)u + (\mu - \lambda_v)v = 0$. (u,v) étant libre, on a $\mu = \lambda_v = \lambda_u$.

c) On suppose X de dimension 2. Soit $f\colon X \longrightarrow X$ une application d'ensembles telle que pour toute droite D de X, $f(D)$ est une droite parallèle à D. Montrons que f est une homothétie ou une translation.
Commençons par noter qu'une telle application est injective. En effet s'il existait A et B deux points distincts de X tels que $f(A) = f(B) = C$, alors tout point M pris en dehors de la droite (AB) aurait pour image C *($f(M)$ devant être à l'intersection de la parallèle (AM) par C et de la parallèle à (BM) par C)* et ainsi toute droite parallèle à (AB) aurait pour image C, ce qui est en contradiction avec les hypothèses faites sur f.

- Supposons que f admet un point fixe O. Soit A est un point distinct de O, on a $f(A) \in (OA)$. Toute droite passant par O est donc globalement invariante par f. Si $f(A) = A$, alors $f = \mathrm{Id}_X$. En effet dans ce cas, tout point B pris en dehors de la droite (OA) a pour image le point d'intersection de (OB) est de la parallèle à (AB) par A, donc $f(B) = B$. En échangeant les rôles de A et B, on voit que si f admet deux points fixes, alors $f = \mathrm{Id}_X$, qui est bien la translation de vecteur nul.

- Supposons que f admet un point fixe unique O. Soit A un point distinct de O. Si h est l'homothétie de centre O qui envoie A sur $A' = f(A)$, on vérifie par construction, que pour tout $M \in X$, $f(M) = h(M)$. On utilise le fait que l'image d'une droite par une homothétie de rapport non nul est une droite qui lui est parallèle.

- Supposons maintenant que f n'admet pas de point fixe. Soient A et B deux points distincts de X. Posons $A' = f(A)$ et $B' = f(B)$. Considérons un point M pris en dehors de la droite (AB). Si $f(M) = M'$, les triangles ABM et $A'B'M'$ sont tels que $(AB)//(A'B')$, $(BM)//(B'M')$ et $(MA)//(M'A')$. D'après le théorème de Desargues (exercice 2 ci-dessus), on a: (AA'), (BB') et (MM') parallèles ou concourantes. f n'ayant pas de point fixe, il est exclus que ces trois droites soient concourantes, donc elles sont parallèles. Comme dans l'exercice 2, on vérifie que f est alors la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

d) Les résultats du c) restent vrais en dimension $\geqslant 3$:

- Le raisonnement qui dit que f est injective reste valide.

- Si f admet deux points fixes distincts, le raisonnement fait en c) peut être reconduit sans changement.

- Si f admet un seul point fixe O, pour construire l'image d'un point quelconque M, on se donne A distinct de O. Si M n'est pas sur la droite (OA), d'après c), dans le plan défini par le triangle OAM, f est l'homothétie de centre O et de rapport $\lambda = \frac{\overline{Of(A)}}{\overline{OA}}$. On en déduit que f coïncide avec l'homothétie de centre O et de rapport λ.

- Si f n'admet pas de point fixe, on se donne A un point de X, on considère $A' = f(A)$ et on constate que pour un point quelconque M de X, $f(M) = M'$ est le translaté de M par le vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

Exercice 4. X est un espace affine non vide, f et g deux homothéties de X. On va montrer que f et g commutent ($f \circ g = g \circ f$) si et seulement si f et g ont même centre.

– Supposons que f et g ont même centre O et ont pour rapport respectif λ et μ. Dans ce cas, quel que soit $M \in X$, on a $f \circ g(M) = f(O + \mu\overrightarrow{OM}) = O + \lambda\mu\overrightarrow{OM}$, et $g \circ f(M) = O + \mu\lambda\overrightarrow{OM}$. On en déduit immédiatement que f et g commutent.

– Réciproquement supposons que f et g commutent. Si on a $f = \mathrm{Id}_X$ ou $g = \mathrm{Id}_X$, il n'y a rien à prouver car Id_X est un homothétie de rapport 1 admettant tout point pour centre. Supposons donc $f \neq \mathrm{Id}_X$ et $g \neq \mathrm{Id}_X$. Dans ce cas f et g admettent chacun un unique point fixe qui est leur centre, que nous noterons respectivement O_1 et O_2. De l'égalité $f \circ g = g \circ f$ nous déduisons $(f \circ g)(O_2) = (g \circ f)(O_2)$, d'où $f(O_2) = g(f(O_2))$. $f(O_2)$ est alors un point fixe de g, donc $f(O_2) = O_2$. Cette dernière égalité nous dit que O_2 est fixe par f, donc $O_2 = O_1$.

Note: On peut résoudre cet exercice en utilisant les calculs faits au a) de l'exercice 3.

Exercice 5. X est un espace affine non vide de dimension finie, $f\colon X \longrightarrow X$ une application affine de partie linéaire φ. On suppose que $\vec{X} = \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{Id})$. On va montrer qu'il existe un unique vecteur $v \in \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})$ et une unique application affine g possédant un point fixe tels que $f = t_v \circ g$.
De plus on a $t_v \circ g = g \circ t_v$.
Existence: il nous faut trouver $x_0 \in X$, $v \in \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})$ tels que $f(x_0) = x_0 + v$. Quel que soit $x \in X$, l'hypothèse $\vec{X} = \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{Id})$ nous dit qu'il existe $u_1, u_2 \in \vec{X}$ tels que $\overrightarrow{xf(x)} = u_1 + (\varphi - \mathrm{Id})(u_2)$, avec $u_1 \in \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})$. On en déduit $f(x) = (x - u_2) + u_1 + \varphi(u_2)$, ou encore $f(x) - \varphi(u_2) = (x - u_2) + u_1$. Compte tenu du fait que φ est la partie linéaire de f, cette dernière égalité s'écrit encore $f(x - u_2) = (x - u_2) + u_1$. Il nous suffit donc de poser $x_0 = x - u_2$ et $v = u_1$. L'application affine g est alors donnée par $g = t_{-v} \circ f$.
Unicité: soient $g, g' : X \longrightarrow X$ deux applications affines admettant respectivement x_0, x_0' pour point fixe, $v, v' \in \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})$ tels que $f = t_v \circ g$ et $f = t_{v'} \circ g'$. Nous avons alors $f(x_0) = x_0 + v$ et $f(x_0') = x_0' + v'$, d'où $\overrightarrow{f(x_0)f(x_0')} = \overrightarrow{f(x_0)x_0} + \overrightarrow{x_0x_0'} + \overrightarrow{x_0'f(x_0')}$.
Ce qui s'écrit encore $\overrightarrow{f(x_0)f(x_0')} = \overrightarrow{x_0x_0'} + v' - v$, donc $\varphi(\overrightarrow{x_0x_0'}) = \overrightarrow{x_0x_0'} + (v' - v)$.
Finalement $(\varphi - \mathrm{Id})(\overrightarrow{x_0x_0'}) = v' - v$, ce qui veut dire que $(v' - v) \in \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id}) \cap \mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{Id})$, donc $v' - v = 0$ d'après l'hypothèse $\vec{X} = \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{Id})$. L'égalité $v' = v$ entraîne $g = g'$, d'où l'unicité.
L'égalité $t_v \circ g = g \circ t_v$: Remarquons que si φ est la partie linéaire de f et ψ celle de g, alors on a par définition de g, $\varphi = \mathrm{Id}_{\vec{X}} \circ \psi$, donc $\varphi = \psi$. Fixons nous pour origine de X, le point fixe x_0 de g. Pour tout $u \in \vec{X}$, on a $t_v \circ g(x_0 + u) = x_0 + \psi(u) + v$. Comme $\psi = \varphi$ et $\varphi(v) = v$, on a $t_v \circ g(x_0 + u) = x_0 + \psi(u) + \psi(v)$. On en déduit $t_v \circ g(x_0 + u) = x_0 + \psi(u + v) = g(x_0 + u + v) = g \circ t_v(x_0 + v)$. Conclusion: $t_v \circ g = g \circ t_v$.

Exercice 6. X est un espace affine non vide, $f\colon X \longrightarrow X$ une application affine de partie linéaire φ. On considérera que le corps de base est $\mathbb{R}$.

a) On suppose $f^2 = \mathrm{Id}_X$

- Montrons que f admet un point fixe.
  Soit A un point quelconque de X. Si I est le milieu de $[A, f(A)]$, f étant affine, $f(I)$ est milieu de $\left[f(A), f^2(A)\right] = [A, f(A)]$, donc $f(I) = I$.

- L'ensemble $\mathcal{F}$ des points fixes de f est donc non vide. Soit $G = \mathrm{Ker}(\varphi + \mathrm{Id})$. On va montrer que pour tout point M de X, $f(M)$ est caractérisé par les deux propriétés suivantes:
  $$\begin{cases} \text{– Le vecteur } \overrightarrow{Mf(M)} \text{ est dans } G \\ \text{– Le milieu du segment } [M, f(M)] \text{ est dans } \mathcal{F} \end{cases}$$

  i. Soit $M \in X$. On a $f(f(M)) = M$, donc $f(M + \overrightarrow{Mf(M)}) = M$. Comme $f(M + \overrightarrow{Mf(M)}) = f(M) + \varphi(\overrightarrow{Mf(M)})$, on a $M = f(M) + \varphi(\overrightarrow{Mf(M)})$, donc $(\varphi + \mathrm{Id})(\overrightarrow{Mf(M)}) = 0$ et on a bien $\overrightarrow{Mf(M)} \in G$. f étant affine et vérifiant $f^2 = \mathrm{Id}_X$, le milieu du segment $[M, f(M)]$ est un point fixe de f.

  ii. Supposons à présent que N est un point de X vérifiant les propriétés
  $$\begin{cases} \text{– Le vecteur } \overrightarrow{MN} \text{ est dans } G \\ \text{– Le milieu du segment } [M, N] \text{ est dans } \mathcal{F} \end{cases}.$$
  Nous devons montrer que $f(M) = N$.
  Soit I le milieu de $[M, N]$. On a $f(M) = f(I + \overrightarrow{IM})$.
  $f(M) = I + \varphi(\overrightarrow{IM}) = I + \varphi(\frac{1}{2}\overrightarrow{NM}) = I + \frac{1}{2}\overrightarrow{MN} = I + \overrightarrow{IN} = N$.

b) L'égalité $\varphi^2 = \mathrm{Id}_{\vec{X}}$ n'entraîne pas forcément $f^2 = \mathrm{Id}_X$. Il suffit pour s'en convaincre, de prendre pour f, une translation de vecteur non nul. Cependant si l'ensemble des points fixes de f est non vide et $\varphi^2 = \mathrm{Id}_{\vec{X}}$, alors on a $f^2 = \mathrm{Id}_X$.

Exercice 7. f est l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 9x+2y-6z+38 \\ 2x+9y+6z+17 \\ -6x+6y-7z-29 \end{pmatrix}.$$

a) On a $f(0,0,0) = \frac{1}{11}(38, 17, -29)$ et l'application φ: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 9x+2y-6z \\ 2x+9y+6z \\ -6x+6y-7z \end{pmatrix}$ est linéaire. La matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $S = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 9 & 2 & -6 \\ 2 & 9 & 6 \\ -6 & 6 & -7 \end{pmatrix}$. On notera que S^2 est la matrice identité. f n'a pas de point fixe car le système linéaire
$$\begin{cases} 9x+2y-6z+38 = 11x \\ 2x+9y+6z+17 = 11y \\ -6x+6y-7z-29 = 11z \end{cases} \quad \text{qui équivaut à} \quad \begin{cases} -2x+2y-6z+38 = 0 \\ 2x-2y+6z+17 = 0 \\ -6x+6y-28z-29 = 0 \end{cases} \quad \text{n'admet pas de solution.}$$
(la somme des deux premières équations du second système donne $55 = 0$)

b) Montrons que le plan P d'équation $x-y+3z+3=0$ est stable par f:

- Posons $A = (0,0,-1)$. On a $A \in P$ et $f(A) = (4,1,-2) \in P$. Soient $u_1 = (1,1,0)$ et $u_2 = (0,3,1)$. Le système (u_1, u_2) est une base de $\vec{P}$. On vérifie aisément que $\varphi(u_1) = u_1$ et $\varphi(u_2) = u_2$.

- Si nous prenons A pour origine de P, nous avons:
quel que soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $f(A + x_1u_1 + x_2u_2) = f(A) + x_1u_1 + x_2u_2$. P est donc stable par f et φ restreinte à P est $\mathrm{Id}_{\vec{P}}$.
La restriction de f à P est donc une translation de vecteur $\vec{u} = (4,1,-1) = \overrightarrow{Af(A)}$.

c) Considérons $g = t_{-\vec{u}} \circ f$. g est affine en tant que composée d'applications affines. Par définition de g, la restriction de g à P est Id_P. Prenant l'origine de $\mathbb{R}^3$ en A, posons $u_3 = (1,-1,3)$. u_3 est un vecteur normal au plan P. (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et on a $\varphi(u_1) = u_1$, $\varphi(u_2) = u_2$, $\varphi(u_3) = -u_3$. Conclusion: g est une symétrie (orthogonale) par rapport à P parallèlement à la direction $\mathbb{R} \cdot u_3$.