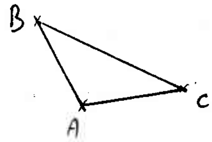
L3 géométrie - Corrigé de la feuille 5

1 

On a $\|\vec{BC}\|^2 = \|\vec{BA}+\vec{AC}\|^2 = \|\vec{BA}\|^2 + \|\vec{AC}\|^2 + 2\,\vec{BA}\cdot\vec{AC}$

Donc $BC^2 = AB^2 + AC^2 \iff \vec{BA}\cdot\vec{AC} = 0$

$\iff$ ABC est rectangle en A

2. P plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $ax+by+cz+d=0$ avec $(a,b,c)\neq(0,0,0)$. Soit $A=(x_A, y_A, z_A)$ un point de $\mathbb{R}^3$. Soit A_p le projeté orthogonal de A sur P. Notons (x,y,z) les coordonnées de A_p dans le repère canonique. A_p est caractérisé par :

$A_p \in P$ ce qui se traduit par $ax+by+cz+d=0$

et $\vec{AA_p}$ est orthogonal à $\vec{P}$ ce qui se traduit par : $(x-x_A, y-y_A, z-z_A)$ est colinéaire à (a,b,c)

ou encore : $\exists \lambda\in\mathbb{R},\ (x-x_A, y-y_A, z-z_A) = \lambda(a,b,c)$

On a donc $x = x_A+\lambda a$, $y = y_A+\lambda b$ et $z = z_A+\lambda c$ pour un $\lambda\in\mathbb{R}$. En reportant dans l'équation de P on obtient

$ax_A + \lambda a^2 + by_A + \lambda b^2 + cz_A + \lambda c^2 + d = 0$ d'où $\lambda = -\dfrac{ax_A+by_A+cz_A+d}{a^2+b^2+c^2}$

En reportant $x = x_A + \lambda a = \dfrac{b(bx_A-ay_A)+c(cx_A-az_A)-ad}{a^2+b^2+c^2}$, $y = y_A+\lambda b = \dots$

On a pour tout point M de P $\|\vec{AM}\|^2 = \|\vec{AA_p}\|^2 + \|\vec{A_pM}\|^2$ car AA_pM est rectangle en A_p

$\geqslant \|\vec{AA_p}\|^2$ avec égalité ssi $M = A_p$

donc $\|\vec{AM}\| \geqslant \|\vec{AA_p}\|$ avec égalité ssi $M = A_p$

donc $d(A,P) = \inf\limits_{M\in P} \|\vec{AM}\| = \|\vec{AA_p}\|$

On a $\vec{AA_p} = \lambda(a,b,c)$ donc $\|\vec{AA_p}\|^2 = \lambda^2(a^2+b^2+c^2)$ (la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est orthonormée pour le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^3$ donc $\|(a,b,c)\|^2 = a^2+b^2+c^2$)

On obtient avec les calculs qui précèdent $\|\vec{AA_p}\|^2 = (ax_A+by_A+cz_A+d)^2$ donc $d(A,P) = |ax_A+by_A+cz_A+d|$.

3a. Soient A, B, C trois points non alignés du plan euclidien (de sorte que le triangle ABC est non dégénéré). Soient Δ_1, respectivement Δ_2, Δ_3, la médiatrice du segment $[A,B]$, respectivement des segments $[B,C]$ et $[A,C]$.

Δ_1 est orthogonale à la droite (AB) et Δ_2 est orthogonale à la droite (BC). Supposons $\Delta_1 // \Delta_2$ alors $(AB)//(BC)$ et comme B est un point commun de (AB) et (BC) on obtient $(AB)=(BC)$ mais alors A,B,C sont alignés ce qui contredit l'hypothèse faite sur A,B,C. Donc Δ_1 n'est pas parallèle à Δ_2 et comme on est dans le plan Δ_1 et Δ_2 sont sécantes (cf ex 7 de la feuille 2). Notons O le point d'intersection de Δ_1 avec Δ_2.

On a $O\in\Delta_1$ donc $OA=OB$; $O\in\Delta_2$ donc $OB=OC$. On en déduit $OA=OC$ donc $O\in\Delta_3$ donc Δ_1, Δ_2 et Δ_3 sont concourantes en O.

3b. Soit ABC un triangle équilatéral. On a $AB = AC = BC$ donc $A = B = C$ ou A, B, C sont non alignés (cf cours : cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire). Comme on est dans le plan, (A, B, C) forme un repère affine de ce plan.

Soit maintenant A', B', C' trois autres points du plan, alors il existe une et une seule application affine du plan dans lui même transformant (A, B, C) en (A', B', C') (cf cours applications affines et repères). Notons la f.

Soient $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ les trois médiatrices du triangle ABC comme en 3a. Elles sont concourantes en un point O. Leurs images par f ~~et~~ sont des droites ou des points (des droites si f est injective) et ces images passent par $f(O)$.

Si A', B', C' sont non alignés, ce que nous supposerons, (A', B', C') est aussi un repère affine du plan donc f est bijective donc l'image par f d'une droite est une droite.

La droite Δ_1 passe par C et par le milieu de $[A,B]$. f est affine donc préserve les milieux, donc $f(\Delta_1)$ passe par $f(C)$ et le milieu de $[f(A), f(B)]$. Autrement dit $f(\Delta_1)$ est la médiane du triangle $A'B'C'$ issue de C'. De même $f(\Delta_2)$ et $f(\Delta_3)$ sont les médianes de $A'B'C'$ issue de A' et B' respectivement. On obtient que les trois médianes de $A'B'C'$ sont concourantes en $f(O)$. (Rq : on sait que ce point de concours est l'isobarycentre de A', B' et C'.)

3c. Soient O' le point de concours des trois médiatrices de $A'B'C'$ (question 3a) et h l'homothétie de centre $f(O)$ et de rapport -2

Notons $\Delta'_1, \Delta'_2, \Delta'_3$ les médiatrices des segments $[A', B']$, $[B', C']$ et $[A', C']$.

Notons I le milieu de $[A', B']$. $f(O)$ est l'isobarycentre de A', B', C' donc $\overrightarrow{C'f(O)} + 2\overrightarrow{If(O)} = 0$ donc $h(I) = C'$

On sait que $h(\Delta'_1)$ est une droite parallèle à Δ'_1 donc elle est orthogonale à $(A'B')$. Elle passe par $h(I)$ ~~est~~ donc par C'. Conclusion : $h(\Delta'_1)$ est la hauteur de $A'B'C'$ issue de C'.

On montre de même $h(\Delta'_2)$, resp. $h(\Delta'_3)$, est la hauteur issue de A', resp. B'

$\Delta'_1, \Delta'_2, \Delta'_3$ sont concourantes en O' donc $h(\Delta'_1), h(\Delta'_2), h(\Delta'_3)$ sont concourantes en $h(O')$, orthocentre du triangle $A'B'C'$.

(faire un dessin)

4. Cf corrigé du partiel de nov. 2004
5. Cf corrigé de l'examen de sept 2005
6. Cf corrigé de l'exercice 1 de la feuille 4 de 2004-05

7 et 8 Cf les corrigés des examens correspondant

9. Supposons d'abord $\alpha + \beta \neq 0$ et soit G le barycentre de (A, α) et (B, β). On a $\alpha MA^2 + \beta MB^2 = \alpha MG^2 + \alpha GA^2 + \alpha \vec{MG}\cdot\vec{GA} + \beta MG^2 + \beta GB^2 + \beta \vec{MG}\cdot\vec{GB} = (\alpha+\beta) MG^2 + \alpha GA^2 + \beta GB^2 + \vec{MG}\cdot(\alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB}) = (\alpha+\beta) MG^2 + \alpha GA^2 + \beta GB^2$

Soit alors λ un réel. L'ensemble $\{M \in \mathcal{P}, \alpha MA^2 + \beta MB^2 = \lambda\}$ est : vide si $\dfrac{\lambda - \alpha GA^2 - \beta GB^2}{\alpha+\beta} < 0$

$\{G\}$ si $\lambda = \alpha GA^2 + \beta GB^2$

le cercle de centre G de rayon $\sqrt{\dfrac{\lambda - \alpha GA^2 - \beta GB^2}{\alpha+\beta}}$ dans les autres cas.

Supposons maintenant $\alpha + \beta = 0$ alors $\alpha MA^2 + \beta MB^2 = \alpha MA^2 + \beta MA^2 + \beta \vec{MA}\cdot\vec{AB} + \beta AB^2 = \beta \vec{MA}\cdot\vec{AB} + \beta AB^2 = \beta \vec{MB}\cdot\vec{AB}$

Si $A = B$ ou si $\beta = 0$ ~~alors~~ φ est constante égale à 0 et $\varphi^{-1}(\lambda)$ est $\mathcal{P}$ ou $\emptyset$ suivant que $\lambda = 0$ ou pas

Si $A \neq B$ et $\beta \neq 0$ notons $M_0 = B - \dfrac{\lambda}{\beta AB^2}\vec{AB}$ alors $\vec{M_0B} = \dfrac{\lambda}{\beta AB^2}\vec{AB}$ donc $\beta \vec{M_0B}\cdot\vec{AB} = \lambda$. On obtient $\{M \in \mathcal{P}, \alpha MA^2 + \beta MB^2 = \lambda\} =$ ~~$\{M \in \mathcal{P}, \beta \vec{MM_0}\cdot\vec{AB}$~~ $=$

$\{M \in \mathcal{P}, \beta \vec{MM_0}\cdot\vec{AB} = 0\}$ = droite passant par M_0 orthogonale à (AB).