Corrigé de l'exercice 1 feuille 4 : composée de symétries centrales sur la droite affine

a) Soit $M \in \mathcal{D}$. $s_A(M)$ est déterminé par $\overrightarrow{A s_A(M)} = -\overrightarrow{AM}$

$s_B(M)$ ——— $\overrightarrow{B s_B(M)} = -\overrightarrow{BM}$

donc $\overrightarrow{A s_A(s_B(M))} = -\overrightarrow{A s_B(M)} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{B s_B(M)} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM}$

donc $\overrightarrow{M s_A(s_B(M))} = -2\overrightarrow{AB}$ ou encore $s_A \circ s_B(M) = M - 2\overrightarrow{AB}$. On reconnait $t_{-2\overrightarrow{AB}}(M)$

De même $s_C \circ s_D(M) = t_{-2\overrightarrow{CD}}(M)$

On a $s_A \circ s_B = s_C \circ s_C \iff t_{-2\overrightarrow{AB}} = t_{-2\overrightarrow{CD}} \iff \forall M \in \mathcal{D},\ M - 2\overrightarrow{AB} = M - 2\overrightarrow{CD} \iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

b) $t_{\vec{u}} \circ s_A$ est l'application $M \mapsto t_{\vec{u}}(s_A(M)) = t_{\vec{u}}(A - \overrightarrow{AM}) = A - \overrightarrow{AM} + \vec{u}$

Posons $A' = A + \frac{1}{2}\vec{u}$. On a $\overrightarrow{A'M} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\vec{u} + \overrightarrow{AM}$

et $\overrightarrow{A' t_u(s_A(M))} = \overrightarrow{A'A} - \overrightarrow{AM} + \vec{u} = \frac{1}{2}\vec{u} - \overrightarrow{AM}$

donc $\overrightarrow{A' t_{\vec{u}}(s_A(M))} = -\overrightarrow{A'M}$ donc $t_{\vec{u}}(s_A(M)) = s_{A'}(M)$

On peut identifier de même $s_A \circ t_{\vec{u}}$ ou bien utiliser l'astuce suivante : L'application inverse de $t_{\vec{u}}$ est $t_{-\vec{u}}$; celle de s_A est s_A elle même. On a donc $s_A \circ t_{-\vec{u}} \circ t_{\vec{u}} \circ s_A = s_A \circ s_A = id$. Or $t_{\vec{u}} \circ s_A = s_{A + \frac{1}{2}\vec{u}}$, donc $s_A \circ t_{-\vec{u}} = \left(s_{A+\frac{1}{2}\vec{u}}\right)^{-1} = s_{A+\frac{1}{2}\vec{u}}$

Ceci étant vrai quelque soit $\vec{u}$, on peut remplacer $\vec{u}$ par $-\vec{u}$ et on obtient $s_A \circ t_{\vec{u}} = s_{A - \frac{1}{2}\vec{u}}$

c) Soient $A, B, C \in \mathcal{D}$. On a $s_A \circ s_B = s_{A'} \circ s_C$ pour A' tel que $\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{AB}$ (question (a)) c'est à dire $A' = C - \overrightarrow{AB}$

alors $s_A \circ s_B \circ s_C = s_{A'} \circ s_C \circ s_C = s_{A'}$

d) On montre par récurrence sur n que $s_{A_1} \circ \dots \circ s_{A_n}$ est une symétrie centrale si n est ~~pair~~ impair, une translation si n est pair.

Pour $n = 1$ le résultat est vrai. Supposons le vrai pour $n \geq 1$ et montrons le pour $n+1$

Si n est pair on a par hypothèse de récurrence $s_{A_1} \circ \dots \circ s_{A_n} = t_{\vec{u}}$ pour un $\vec{u} \in \vec{\mathcal{D}}$ donc $s_{A_1} \circ \dots \circ s_{A_{n+1}} = t_{\vec{u}} \circ s_{A_{n+1}} = s_{A_{n+1} + \frac{1}{2}\vec{u}}$ et $n+1$ est impair donc le résultat est vrai pour $n+1$ dans ce cas

Si n est impair on a $s_{A_1} \circ \dots \circ s_{A_n} = s_{A'}$ pour un $A' \in \mathcal{D}$ donc $s_{A_1} \circ \dots \circ s_{A_{n+1}} = s_{A'} \circ s_{A_{n+1}} = t_{-2\overrightarrow{A'A_{n+1}}}$ et $n+1$ est pair donc le résultat est vrai pour $n+1$ ds ce cas

Donc le résultat est vrai pour $n+1$ dans tous les cas.

e) $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Les points comme les vecteurs sont alors des éléments de $\mathbb{R}$.

On a $s_{A_1} \circ s_{A_2} = t_{-2\overrightarrow{A_1A_2}}$, $s_{A_3} \circ s_{A_4} = t_{-2\overrightarrow{A_3A_4}}$ donc $s_{A_1} \circ \dots \circ s_{A_4} = t_{-2\overrightarrow{A_1A_2}} \circ t_{-2\overrightarrow{A_3A_4}} = t_{-2(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_3A_4})}$

puis $s_{A_1} \circ \dots \circ s_{A_5} = t_{-2(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_3A_4})} \circ s_{A_5} = s_{A'}$ avec $A' = A_5 - \frac{2}{2}(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_3A_4})$

Ici $\overrightarrow{A_1A_2} = A_2 - A_1 = \sqrt{2} - 1$ (par définition de la structure affine sous jacente à la structure d'espace vectoriel de $\mathbb{R}$)

$\overrightarrow{A_3A_4} = A_4 - A_3 = 2 + 3 = 5$

$A' = 5 - \frac{2}{2}(\sqrt{2} - 1) - \frac{2}{2} \times 5 = 1 - \sqrt{2}$ centre de la symétrie $s_{A_1} \circ \dots \circ s_{A_5}$