Corrigé de l'exercice 3 feuille 4

$\mathcal{P}$ plan affine euclidien, (e_1, e_2) base orthonormée de $\mathcal{P}$, r rotation de centre $O \in \mathcal{P}$ d'angle α relativement à (e_1, e_2), (f_1, f_2) autre BON.

Soit φ la partie linéaire de r. La matrice de φ dans la BON (e_1, e_2) est par définition de α $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

Soit (a,b), respectivement (c,d), les coordonnées de f_1, resp. f_2, dans la base (e_1, e_2). Puisque (f_1, f_2) est une BON, la matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est orthogonale : Elle est inversible et son inverse est ${}^t\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

La matrice de φ dans la base (f_1, f_2) est $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ (cf cours d'algèbre linéaire)

Deux cas se présentent : 1) La matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est dans $O_2^+(\mathbb{R})$ (c'est à dire elle est orthogonale et son déterminant est 1)

Comme $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \in O_2^+(\mathbb{R})$ et comme $O_2^+(\mathbb{R})$ est commutatif on a $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

On reconnait là la matrice d'une rotation vectorielle d'angle α relativement à la base (f_1, f_2). Donc dans ce premier cas, α reste inchangé.

2) $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est dans $O_2^-(\mathbb{R})$ (c'est à dire de déterminant -1). C'est donc la matrice d'une symétrie axiale (vectorielle) de $\mathbb{R}^2$ d'axe disons D. On peut écrire ~~φ~~ l'endomorphisme ψ de $\mathbb{R}^2$ de matrice $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ comme composée de deux symétries axiales $s_{D'} \circ s_{D''}$ et on peut choisir $D' = D$ (cf ex 2 b). ~~Alors $\Big($~~

Alors $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est la matrice de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ $s_D \circ \psi \circ s_D = s_D \circ s_D \circ s_{D''} \circ s_D = s_{D''} \circ s_D = \psi^{-1}$

Or ψ^{-1} est de matrice $\begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix}$. On reconnait là la matrice ds la base (f_1, f_2) d'une rotation vectorielle d'angle $-\alpha$ relativement à la base (f_1, f_2).

On peut aussi calculer le produit des trois matrices en écrivant $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ et en utilisant les formules trigonométriques.